

---

# 複素数関数の積分

---

夏期集中パワーアップ講座  
北 秀和（大阪工業大学）

---

# [1]複素数値関数の積分(その1)

---

実変数  $t$  の複素数値関数  $f(t)$  の積分 ;

$t : a \rightarrow b$  のとき,  $f(t)$  の積分  $F(b)$

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(t_k) \Delta t_k \end{aligned}$$

$$\Delta t_k : t_{k+1} - t_k$$

$$(a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots < t_{n+1} = b),$$

このとき,  $F'(t) = f(t), F(a) = 0$

---

## [1]複素数値関数の積分(その2)

---

$$\begin{aligned} F'(b) &= \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \frac{F(b) - F(t_n)}{\Delta t_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(t_n) \Delta t_n}{\Delta t_n} \\ &= f(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int f(t) dx &= \int \{u(t) + jv(t)\} dt \\ &= \int u(t) dt + j \int v(t) dt \end{aligned}$$

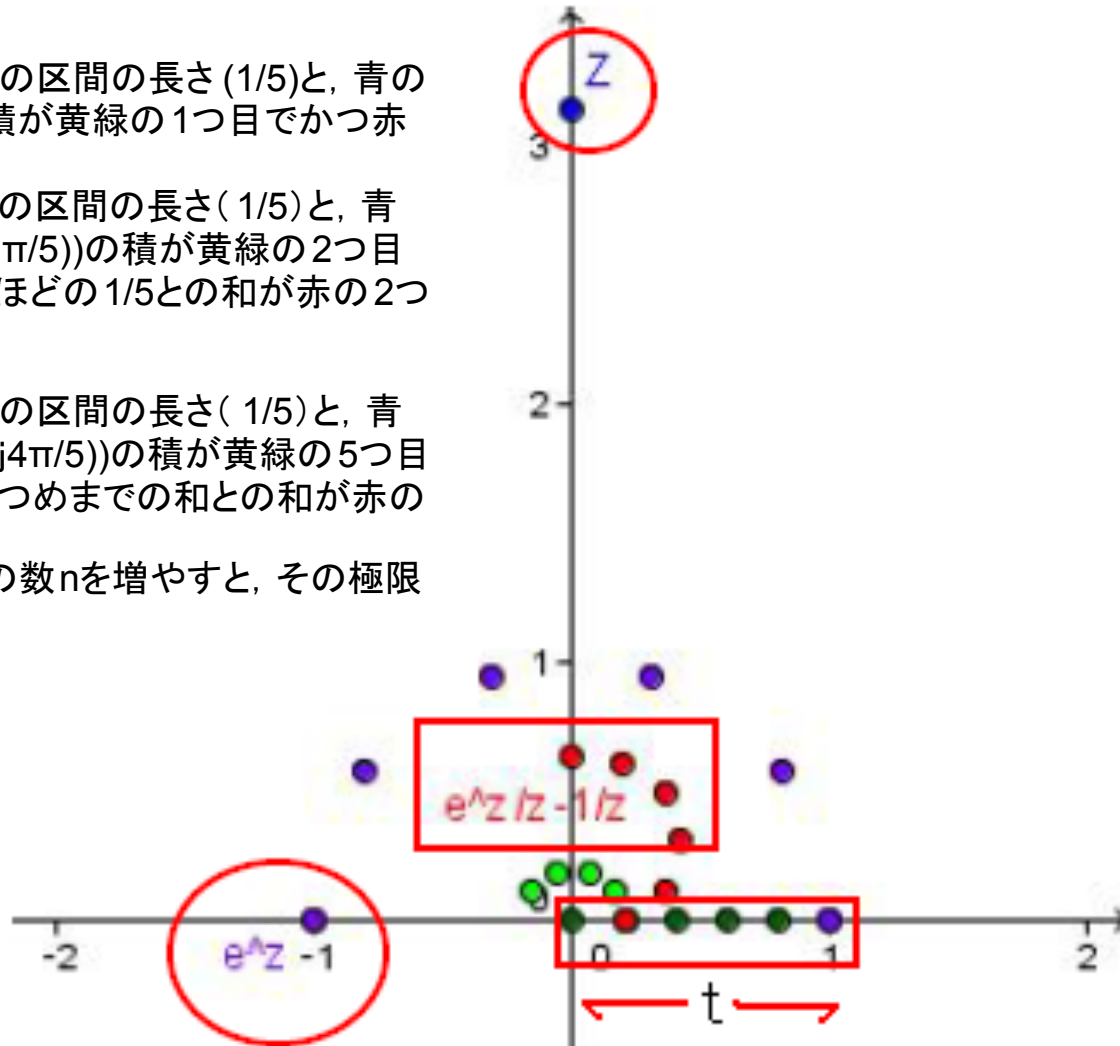
# [1] 複素数値関数の積分(その3)

緑の左から1つ目の区間の長さ(1/5)と、青の1つ目の点(1)の積が黄緑の1つ目でかつ赤の1つ目(1/5).

緑の左から2つ目の区間の長さ(1/5)と、青の2つ目の点( $e^{j\pi/5}$ )の積が黄緑の2つ目( $1/5 e^{j\pi/5}$ ). 先ほどの1/5との和が赤の2つ目.

...  
緑の左から5つ目の区間の長さ(1/5)と、青の5つ目の点( $e^{j4\pi/5}$ )の積が黄緑の5つ目( $1/5 e^{j4\pi/5}$ ). 4つめまでの和との和が赤の5つ目.

区間[0,1]の分割の数 $n$ を増やすと、その極限が定積分となる.



# [1]複素数値関数の積分(その4)

---

不定積分の性質 (複素数値関数)

$$\int k f(t) dt = k \int f(t) dt \quad (k; \text{定数})$$

$$\int \{f(t) + g(t)\} dt = \int f(t) dt + \int g(t) dt$$

$$\int \{f(t) - g(t)\} dt = \int f(t) dt - \int g(t) dt$$

---

## 例5.1.1

---

$$(1) \quad \int e^{(a+jb)t} dt = \frac{1}{a+jb} e^{(a+jb)t} + C //$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int t e^{jqt} dx &= \frac{-j}{q} t e^{jqt} + \int \frac{j}{q} e^{jqt} dt \\ &= \frac{-j}{q} t e^{jqt} + \frac{1}{q^2} e^{jqt} + C \\ &= \frac{-jqt + 1}{q^2} e^{jqt} + C \end{aligned}$$

部分積分

## 例5.1.2

---

$$(1)(2) \quad \int t \cos t dt + j \int t \sin t dt = \int t e^{jt} dt$$

として計算する.

$$\int t e^{jt} dt = -j t e^{jt} + \int j e^{jt} dt$$

$$= (-jt + 1)e^{jt} + C$$

部分積分

$$= (-jt + 1)(\cos t + j \sin t) + C$$

$\cos$  は実部,  $\sin$  は虚部となるので,

$$(1) \quad \int t \cos t dt = \cos t + t \sin t + C \quad //$$

$$(2) \quad \int t \sin t dt = \sin t - t \cos t + C \quad //$$

---

## [2]複素関数の積分(1)

---

複素関数  $f(z)$  の経路積分；

$C : a \rightarrow b$  を経路とする,  $f(z)$  の積分  $F(b)$

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_C f(z) dz \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(z_k) \Delta z_k \end{aligned}$$

$z_k : C$  上,  $\Delta z_k : z_{k+1} - z_k$

$(a = z_0, z_1, \dots, z_k, \dots, z_{n+1} = b),$

このとき,  $F'(z) = f(z), F(a) = 0$

---

## [2]複素関数の積分(2)

---

$$C : z(t)$$

$$(0 \leq t \leq 1, z(0) = a, z(1) = b)$$

なら

経路が $t$ の関数

$$F(b) = \int_0^1 f(z(t))z'(t)dt$$

閉経路では、内部が左側と

なるように回る.

---

## [2]複素関数の積分(3)

---

$$\begin{aligned} F'(b) &= \lim_{\Delta z_n \rightarrow 0} \frac{F(b) - F(z_n)}{\Delta z_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) \Delta z_n}{\Delta z_n} \\ &= f(b) \end{aligned}$$

$f(z)$  の経路積分は,  $f(z)$  の原始関数で,  $F(a) = 0$

となるものであり,

$F(z)$  は, 複素関数として正則関数となっている.

---

## [2]複素関数の積分(4)

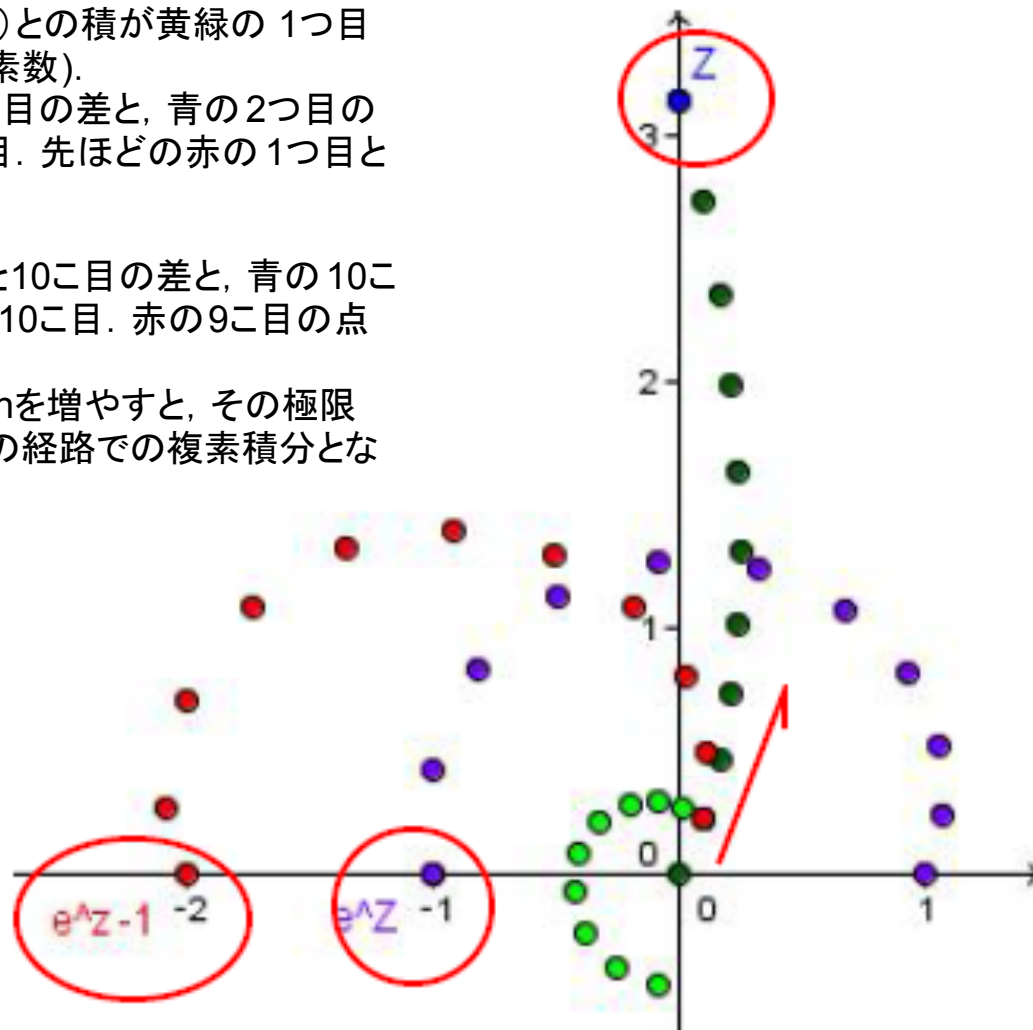
緑の0から2つ目と1つ目の差(複素数)と、青の1つ目の点(複素数)との積が黄緑の1つ目でかつ赤の1つ目(複素数).

緑の0から3つ目と2つ目の差と、青の2つ目の点の積が黄緑の2つ目. 先ほどの赤の1つ目との和が赤の2つ目.

...

緑の0から11こ目( $\pi$ )と10こ目の差と、青の10こ目の点の積が黄緑の10こ目. 赤の9こ目の点との和が赤の10こ目.

区間 $[0, 1]$ の分割の数 $n$ を増やすと、その極限が0から $\pi$ へ向かう緑の経路での複素積分となる.



# 経路積分の性質

---

経路積分の性質 (複素関数)

$$\int_C kf(z)dz = k \int_C f(z)dz \quad (k; \text{定数})$$

$$\int_C \{f(z) \pm g(z)\}dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz$$

$C_1 = -C$  のとき, (同じ経路の逆まわり)

$$\int_{C_1} f(z)dz = - \int_C f(z)dz$$

$C = C_1 + C_2$  のとき,

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

## 例5.2.1(1)

---

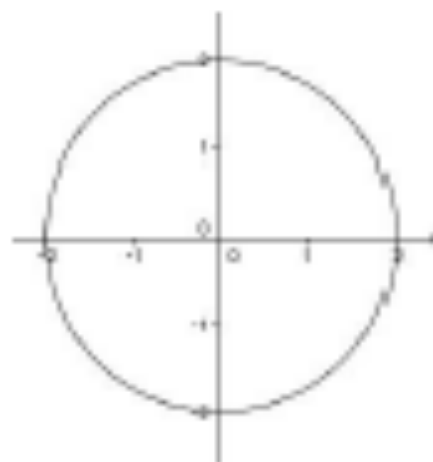
$$z = re^{jt} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$dz = rje^{jt} dt$$

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{jt}} rje^{jt} dt = j \int_0^{2\pi} dt$$

$$= j[t]_0^{2\pi}$$

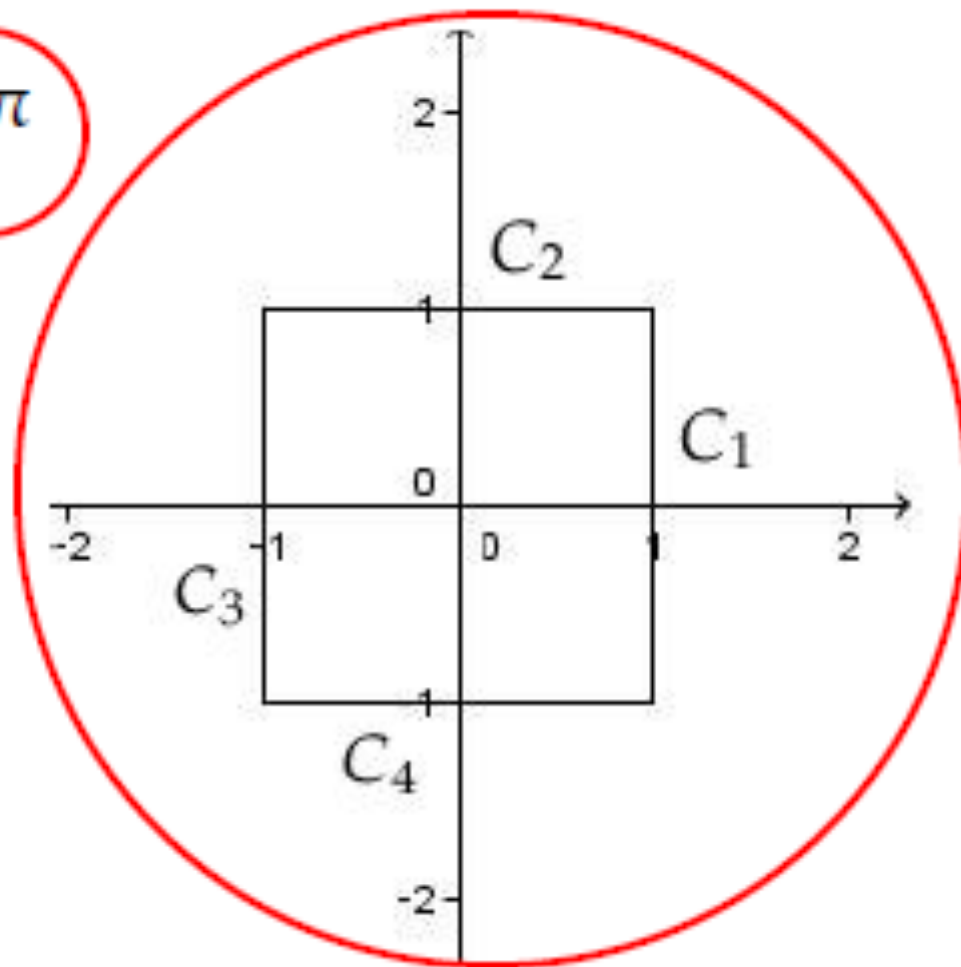
$$= j2\pi //$$



## 例5.2.1(2)

---

$$\int_C \frac{1}{z} dz = j2\pi$$

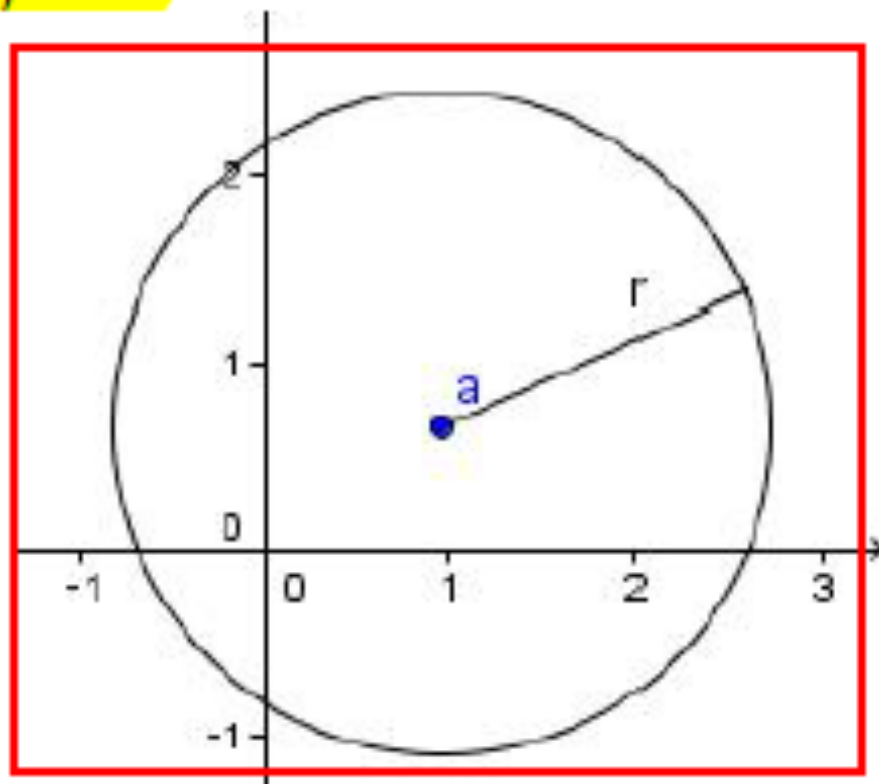


## 例5.2.1(3)

$$dz = rje^{jt}dt$$

$$\text{与式} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{jt}} rje^{jt} dt$$

$$\int_C \frac{1}{z-a} dz = j2\pi$$



## 例5.2.1(4)

$$z = a + re^{jt} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

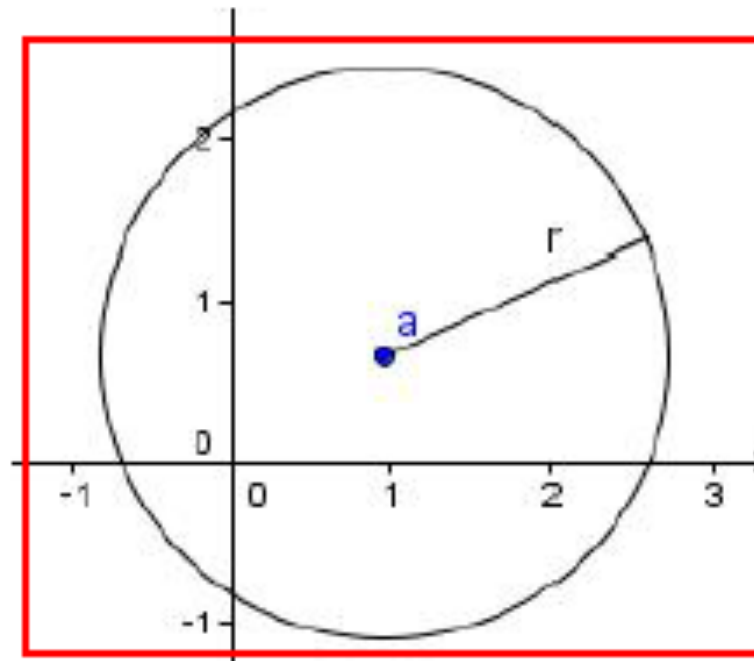
$$dz = rje^{jt} dt$$

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 e^{2jt}} rje^{jt} dt$$

$$= \frac{j}{r} \int_0^{2\pi} e^{-jt} dt$$

$$= -\frac{1}{r} [e^{-jt}]_0^{2\pi}$$

$$= 0 //$$



# コーシーの積分定理

---

$a$  を  $C$  内の点,  $f(a) = a_0$  として,

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

練習5.2.1(2) より

$$\int_C f(z) dz$$

$$= \int_C \{a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots\} dz$$

$$= 0$$

$a$  を  $C$  内の点,  $f(a) = a_0$  として,

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

例5.2.1(3)より

$$\int_C \frac{f(z)}{z - a} dz$$

$$= \int_C \left\{ \frac{a_0}{z - a} + a_1 + a_2(z - a) + \dots \right\} dz$$

$$= 2\pi j a_0$$

コーシーの積分公式

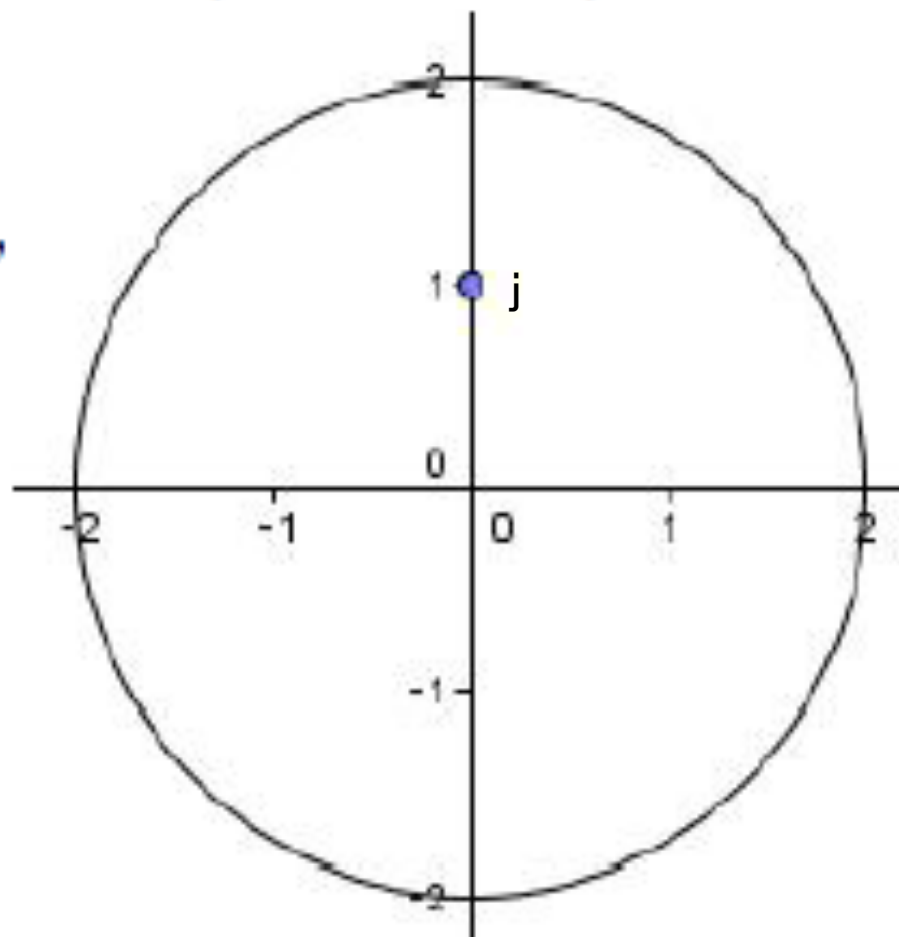
$$\underbrace{f(a)}_{\text{~~~~~}} = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{\underbrace{z - a}_{\text{~~~~~}}} dz$$

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{z}{z-j} dz \quad (C : 2e^{jt}, 0 \leq t \leq 2\pi)$$

経路  $C$  は,  $z = 2e^{jt} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

$z = j$  は経路の  
内部の点だから,  
与式 =  $f(j) = j$

コーシーの積分公式



$$(2) \quad \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{z^3}{z^2 - 2z - 3} dz \quad (C: 2e^{jt}, 0 \leq t \leq 2\pi)$$

経路  $C$  は,  $z = 2e^{jt}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ )

被積分関数の分母を因数分解すると,  $(z + 1)(z - 3)$

$z = -1$  が経路の内部の点

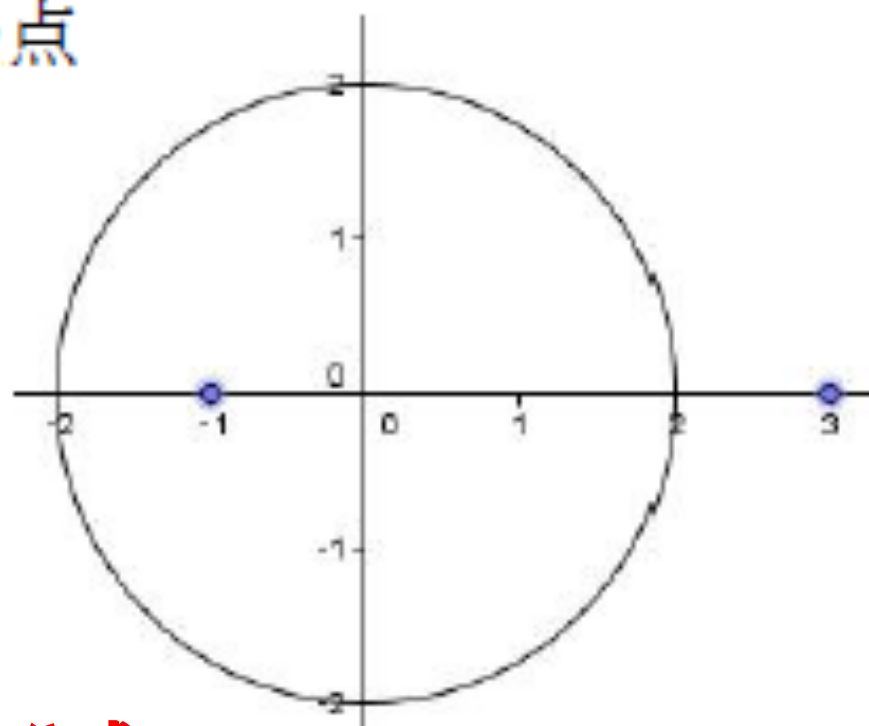
だから,

$$\text{与式} = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\frac{z^3}{z-3}}{z+1} dz$$

$$= \frac{(-1)^3}{(-1) - 3}$$

$$= \frac{1}{4} //$$

コーシーの積分公式



$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \sin t} dt$$

変数変換は,  $je^{jt} dt = dz$   $dt = \frac{1}{jz} dz$

$$\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} = \frac{z^2 - 1}{2jz}$$

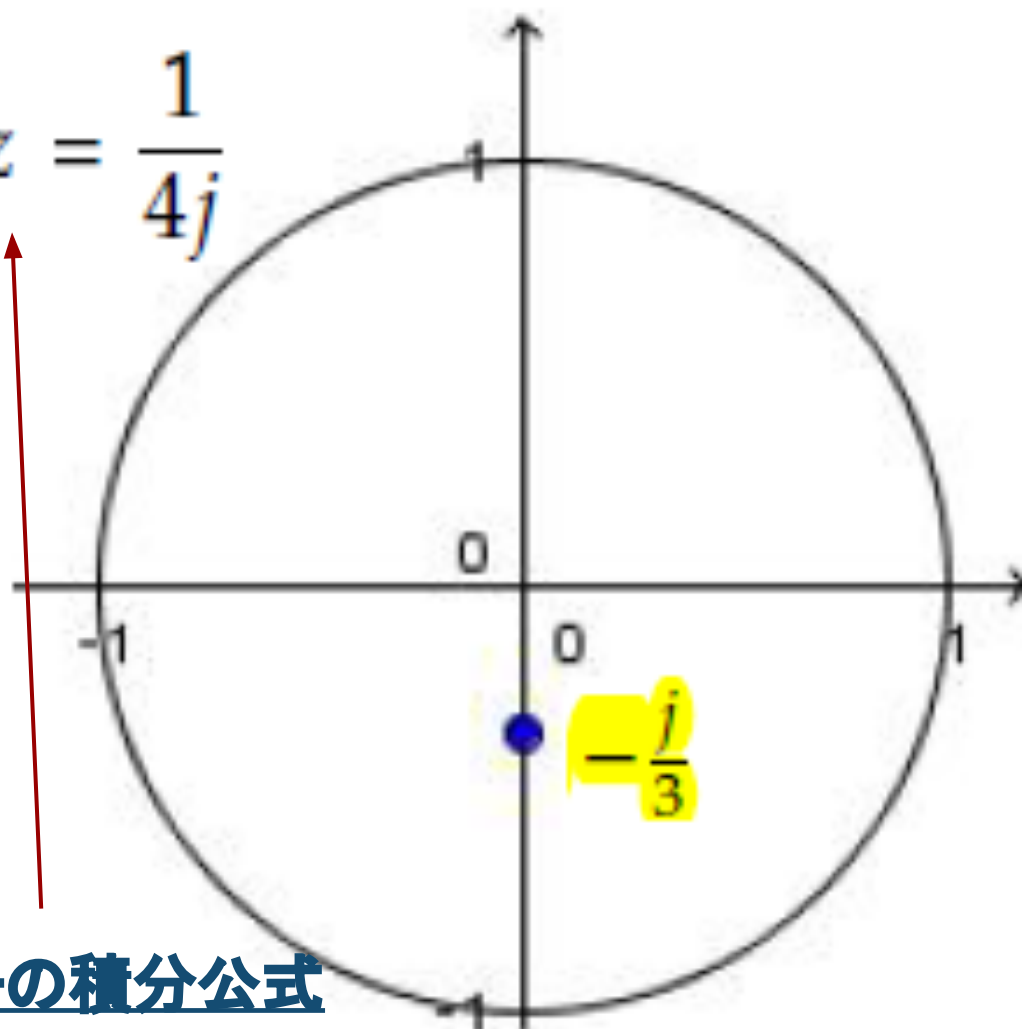
$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_C \frac{1}{5 + 3 \frac{z^2 - 1}{2jz}} \frac{dz}{jz} \\ &= \int_C \frac{2dz}{3z^2 + 10jz - 3} \end{aligned}$$

$$\text{分母} = (3z + j)(z + 3j)$$

$z = -\frac{j}{3}$  だけが経路の内部の点だから、

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\frac{2}{3(z+3j)}}{z + \frac{j}{3}} dz = \frac{1}{4j}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= 2\pi j \frac{1}{4j} \\ &= \frac{\pi}{2} \quad // \end{aligned}$$

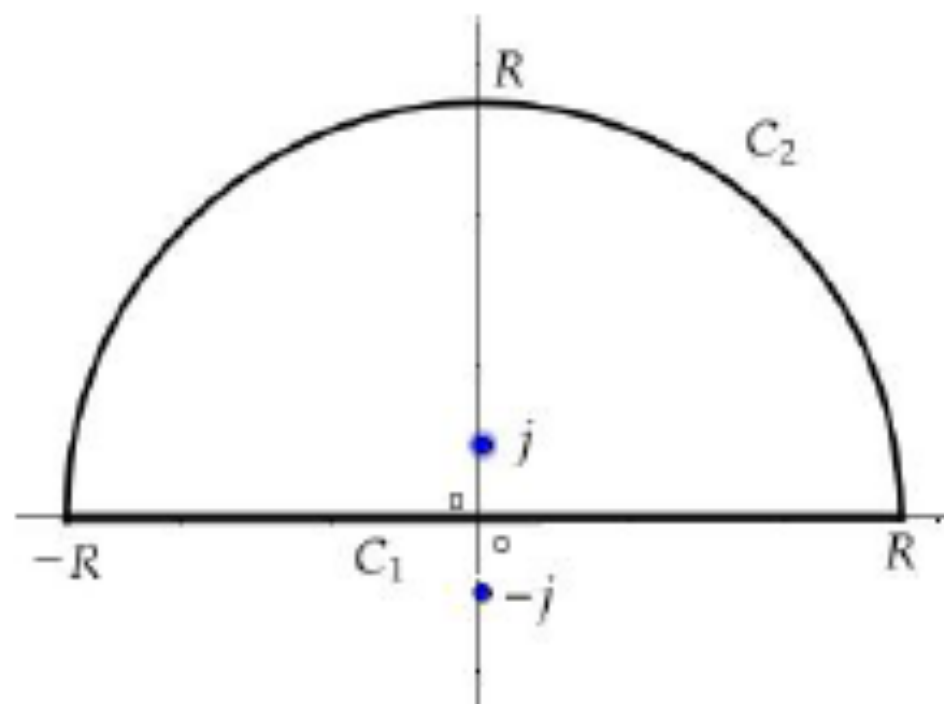


コーシーの積分公式

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

経路は,  $C_1: z = x \quad (-R \leq x \leq R \quad R: \text{正の実数})$

$C_2: z = Re^{jt} \quad (0 \leq t \leq \pi, \quad R: \text{正の実数})$



$$\int_{C_1+C_2} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{C_1} \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{C_2} \frac{1}{1+z^2} dz$$

において、左辺は分母を因数分解すると、

$$(z+j)(z-j)$$

コーシーの積分公式

$z=j$  だけが経路内

$$\int_{C_1+C_2} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{C_1+C_2} \frac{\frac{1}{z+j}}{z-j} dz = j2\pi \frac{1}{2j} = \pi$$

$$R \rightarrow \infty \text{ としても, } \int_{C_1+C_2} \frac{1}{1+z^2} dz = \pi \quad \dots 1)$$

右辺の  $C_1$  の経路積分は,

$$\int_{C_1} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx$$

$R \rightarrow \infty$  とすると,

$$\int_{C_1} \frac{1}{1+z^2} dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

---

右辺の  $C_2$  の経路積分は,

$R \rightarrow \infty$  とすると,

定理5.6 1) により

$$\int_{C_2} \frac{1}{1+z^2} dz \rightarrow 0$$

したがって,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi \quad //$$

---

# ジョルダンの不等式

---

## (1) *Jordan* の不等式

(Jordan の不等式)

$R > 0$  のとき,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{2R}$$

# 複素積分の上半円収束条件(1)(2)

(定理 \*.\* )

$M$ ; 定数,  $z = Re^{i\theta}$  に対して

$$1) \quad |f(z)| \leq \frac{M}{R^k} \quad (k > 1) \rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

$$2) \quad |f(z)| \leq \frac{M}{R^k} \quad (k > 0) \rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{imz} f(z) dz = 0$$

ここで,

$\Gamma$ ; 実軸上の  $[-R, R]$  を直径とする上方の半円

$m$ ; 正数

$$1/z^2$$

$$1/z$$

## $\int \sin x / x \, dx \, (1)$

---

定理 2) で,  $m = 1$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$  とすると,

$$\begin{aligned}\int_r^R \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{2j} \int_r^R \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{x} dx \\&= \frac{1}{2j} \left( \int_r^R \frac{e^{jx}}{x} dx - \int_r^R \frac{e^{-jx}}{x} dx \right) \\&= \frac{1}{2j} \left( \int_r^R \frac{e^{jx}}{x} dx - \int_{-r}^{-R} \frac{e^{jx}}{x} dx \right) \\&= \frac{1}{2j} \left( \int_r^R \frac{e^{jx}}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{jx}}{x} dx \right)\end{aligned}$$

となつて, 定理が活用できる.

---

## $\int \sin x / x \, dx$ (2)

---

$$\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} \frac{e^{jz}}{z} dz$$

$$C_1 : [r, R], \quad C_2 : Re^{j\theta} \quad (\theta : 0 \rightarrow \pi),$$

$$C_3 : [-R, -r], \quad C_4 : re^{j\theta} \quad (\theta : \pi \rightarrow 0)$$

$$2j \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$$

$$= \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} \frac{e^{jz}}{z} dz - \int_{C_2} \frac{e^{jz}}{z} dz - \int_{C_4} \frac{e^{jz}}{z} dz$$

---

## $\int \sin x / x \, dx \, (3)$

---

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} \frac{e^{jz}}{z} dz = 0$$

定理から

$$\int_{C_4} \frac{e^{jz}}{z} dz = - \int_0^\pi e^{ire^{i\theta}} \frac{1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta$$

$$= - \int_0^\pi e^{ire^{i\theta}} id\theta$$

積分と極限操作

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi e^{ire^{i\theta}} id\theta = -\pi j$$

$$\int \sin x / x \, dx \quad (4)$$

---

$$\frac{e^{iz}}{z} \text{ は}$$

$C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  の内部で正則で,

$$\int_{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

---