# 複素数関数の微分と微分方程式

夏期集中パワーアップ講座

北　秀和（大阪工業大学）

# 複素数値関数の微分

実変数 $t$ の複素数値関数 $z(t)$ の微分 $z'(t)$；

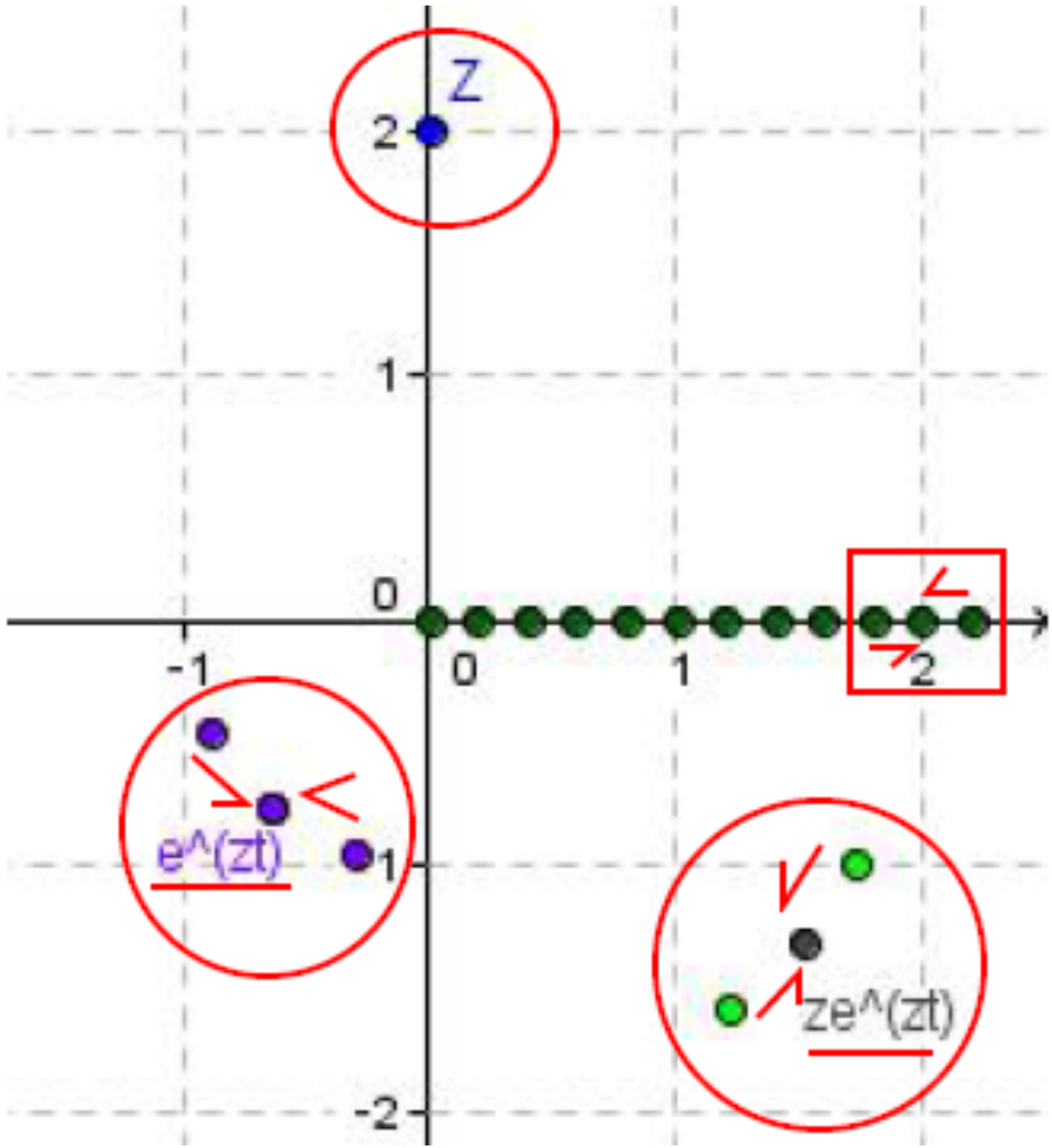
$z(t) = x(t) + jy(t)$ (x(t),y(t); 実関数)

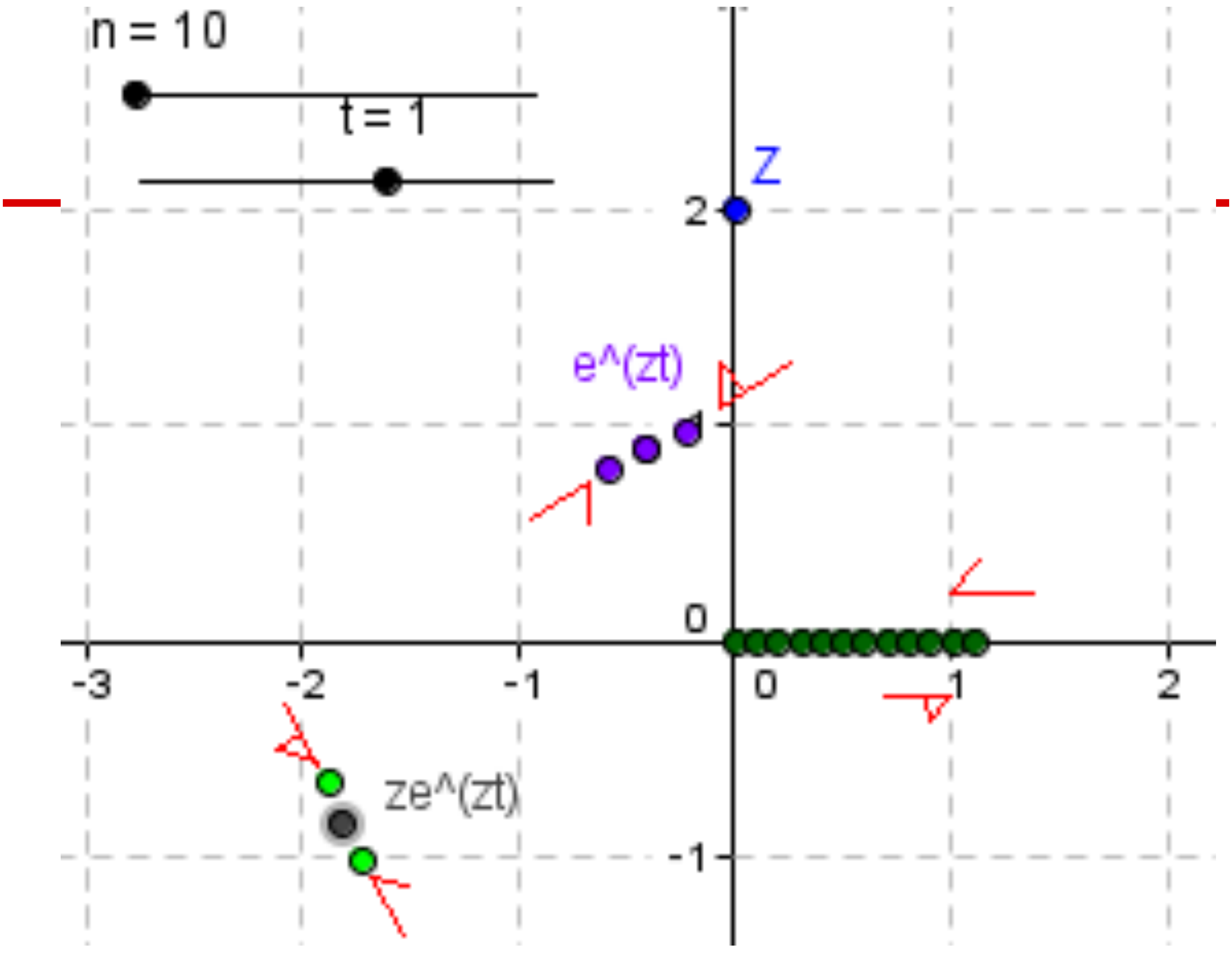
$$z'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\{x(t+\Delta t) + jy(t+\Delta t)\} - \{x(t) + jy(t)\}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} + j \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

$$= \boxed{x'(t) + jy'(t)}$$


z
2
1
0
-1
0
1
2
e^(zt)
1
ze^(zt)
-2



n = 10
t = 1
z
e^(zt)
ze^(zt)
-3
-2
-1
0
1
2
-1
0
1
2

# 複素関数の微分

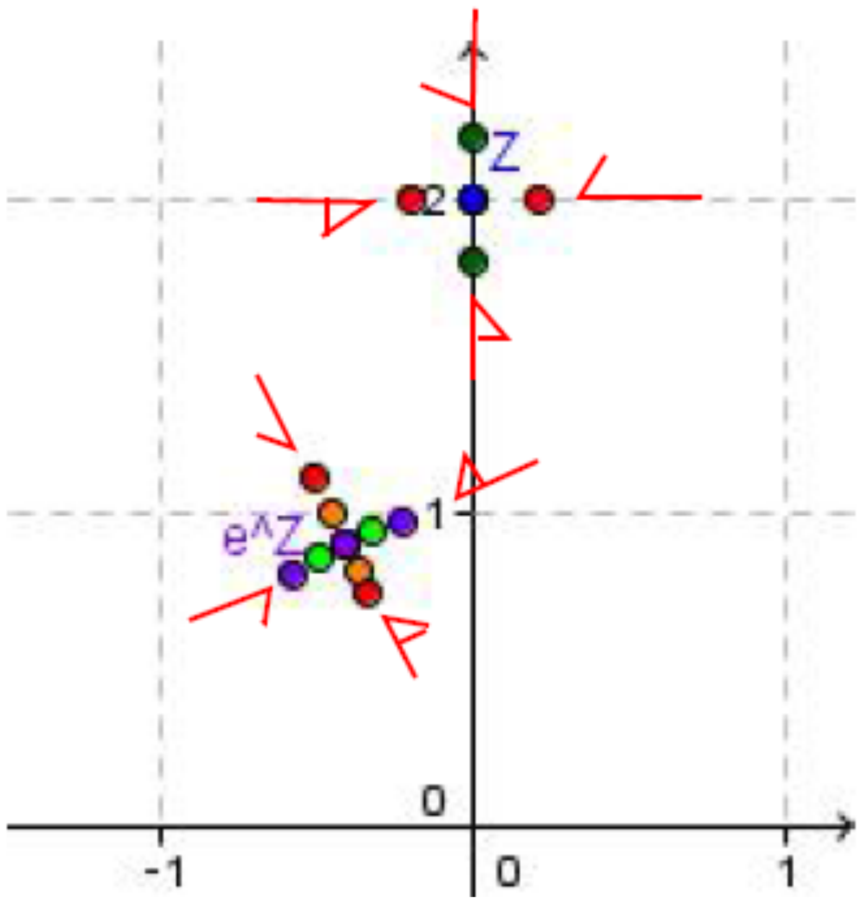
複素変数 $z$ の複素関数 $w(z)$ の微分 $w'(z)$；

$$w'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{w(z+\Delta z) - w(z)}{\Delta z}$$

正則関数；微分可能な複素関数

最終的には，解析関数

（冪級数展開可能な関数）



z
2
e^z
1
0
-1
0
1

# コーシー・リーマンの方程式

$\Delta x, \Delta y$ の 0 への近づき方にかかわらず，極限値が同じ

$\Delta x \to 0, \Delta y = 0$ のときの極限値

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}} + j\frac{\partial v}{\partial x}$$

と $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ のときの極限値

$$\frac{1}{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -j\frac{\partial u}{\partial y} + \boxed{\frac{\partial v}{\partial y}}$$

とが一致していることだから，

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}}$$

となる．この式を「コーシー・リーマンの方程式という」う．

# 導関数の性質

$$\{f \pm g\}' = f' \pm g'$$ （復号同順）

$$\{kf\}' = kf'$$ （$k$；定数）

$$\{fg\}' = f'g + fg'$$

$$\left\{\frac{f}{g}\right\}' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

# 例4.2.1(1)

$$e^{(a+jb)t} = e^{at}e^{jbt} = e^{at}(\cos bt + j\sin bt)$$

$$\begin{aligned}
\{e^{at}(\cos bt + j\sin bt)\}' \\
&= ae^{at}(\cos bt + j\sin bt) \\
&\quad + e^{at}(-b\sin bt + jb\cos bt) \\
&= e^{at}\{(a+jb)\cos bt + (a+jb)j\sin bt\} \\
&= (a+jb)e^{at}(\cos bt + j\sin bt) \\
&= (a+jb)e^{at}e^{jbt} \quad = (a+jb)e^{(a+jb)t} \quad //
\end{aligned}$$

# 例4.2.1(2)

(2) $z = x + jy$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}x = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial y}x = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}y = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}y = 1}$$

コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすから複素関数として微分可能で,

$$z' = \frac{\partial}{\partial x}x + j\frac{\partial}{\partial x}y = 1 \quad //$$

# 例4.2.1(3)

(3) $$(z^2)' = z'z + zz' = 2z$$

$$(z^3)' = (z \cdot z^2)' = 3z^2$$

同様に繰り返して，

$$\begin{aligned}(z^n)' &= (z \cdot z^{n-1})' \\ &= z'z^{n-1} + z(z^{n-1})' \\ &= z^{n-1} + z \cdot (n-1)z^{n-2} = nz^{n-1} \quad //\end{aligned}$$

# 例4.2.1(4)

(4) $$e^z = e^{x+jy} = e^x(\cos y + j\sin y)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y) = e^x\cos y, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y) = -e^x\sin y \\ &\frac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y) = e^x\sin y, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y) = e^x\cos y \end{aligned}}$$

コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすから複素関数として微分可能で，

$$\begin{aligned} (e^z)' &= \frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y) + j\frac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y) \\ &= e^x\cos y + je^x\sin y = e^x(\cos y + j\sin y) \\ &= e^x e^{jy} = e^{x+jy} = e^z \quad // \end{aligned}$$

# 例4.2.1(5)

(5) $\bar{z} = x - yj$

よって,

$$\frac{\partial}{\partial x}x = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y}x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}y = -1$$

コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たさないから複素関数として微分不可 //

# [3]微分方程式への応用

微分方程式；

関数，導関数による方程式をいう．

線形１階微分方程式；

$$\frac{dy}{dx} - ay = 0 \qquad (a;\ \text{定数})$$

関数，第１次導関数による

１次方程式をいう．

# 線形1階微分方程式

(1) $y' - 3y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

として，

$$\frac{1}{y}dy = 3dx$$

y =e^(3x +C)
y =e^C e^(3x)

と変数 $x$, $y$ を両辺に変数分離して，積分する．

一般解は

$$\log|y| = 3x + C \quad (C;\ 積分定数)$$

$$y = C_1 e^{3x} \quad (C_1;\ 積分定数) \quad //$$

# 線形2階微分方程式

関数と第 1 次・第 2 次導関数による
1 次方程式をいう.

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b; \text{定数})$$

特性方程式

$$t^2 + at + b = 0$$

の解 $t_1,\ t_2$ により,
線形 1 階微分方程式に帰着

# 例4.3.1(1)

特性方程式は, $t^2 - 5t + 6 = 0$

解は、 $2, 3$

線形 1 階微分方程式

$$y' - 2y = 0 \qquad y' - 3y = 0$$

の解は、

$$y = C_1 e^{2x}、y = C_2 e^{3x}$$

一般解は、

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \quad (C_1,\ C_2 ; \text{積分定数})$$

# 例4.3.2(2)　2重解　その1

特性方程式は,

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

解は、 2(重解)

線形 1 階微分方程式

$$y' - 2y = 0$$ の解は, $y_1 = C_1 e^{2x}$

# 例4.3.2(2)　2重解　その2

$y_1 = C_1 e^{2x}$ の定数 $C_1$ を $x$ の関数 $C(x)$ と見て

$$y = Ce^{2x} \qquad [y]' = C'e^{2x} + C \cdot 2e^{2x}$$

$$C'\cancel{e^{2x}} + \cancel{C \cdot 2e^{2x}} - \cancel{2} \cdot \cancel{Ce^{2x}} = C_1\cancel{e^{2x}}$$

$$C' = C_1$$

$$dC = C_1 dx$$

$$C = C_1 x + C_2$$

一般解は、$y = C_1 x e^{2x} + C_2 e^{2x}$　$(C_1,\ C_2$；積分定数$)$

# 例4.3.2(3)　虚数解（その1）

特性方程式は,

$$t^2 - 2t + 5 = 0$$

解は、 $t = 1 \pm 2j$

線形 1 階微分方程式は,

$$y' = (1+2j)y \qquad y' = (1-2j)y$$

解は、 $y = C_1 e^{(1+2j)x}$、$y = C_2 e^{(1-2j)x}$

一般解は, $y = C_1 e^{(1+2j)x} + C_2 e^{(1-2j)x}$

# 例4.3.2(3)　虚数解（その2）

実関数の一般解は，

$$y = C_1 e^x(\cos 2x + j\sin 2x) + C_2 e^x(\cos 2x - j\sin 2x)$$

$$y = (C_1 + C_2)e^x \cos 2x + \boxed{j}(C_1 - C_2)e^x \sin 2x$$

$$(C_1 + C_2) = C_3 \quad (C_3;\ \text{実数})$$

$$(C_1 - C_2) = -jC_4 \quad (C_4;\ \text{実数})$$

となるように，$C_1$，$C_2$ をとると，

$$y = C_3 e^x \cos 2x + C_4 e^x \sin 2x$$

$(C_3$，$C_4$；積分定数$)$