
オイラーの公式

夏期集中パワーアップ講座
北 秀和（大阪工業大学）

§3 冪級数展開

関数の冪級数展開；関数 $f(x)$ を，
冪級数で表したもの，

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \end{aligned}$$

e^x の冪級数展開

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

x=0 を代入

e^x の冪級数展開が

$$e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad (E)$$

であるとするとき、

$$e^0 = 1$$

だから、

$$a_0 = 1$$

微分して, $x=0$ を代入

両辺を微分すると,

$$\begin{aligned}(e^x)' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots \\ &= e^x\end{aligned}$$

だから,

$$a_1 = 1$$

さらに、両辺を微分して、 $x=0$ を代入

さらに、両辺を微分すると、

$$(e^x)'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$
$$= e^x$$

だから、

$$2a_2 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2}$$

n 回目の微分をして, $x=0$ を代入

n 回目の微分をする,

$$(e^x)^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots 2a_n + \cdots$$
$$= e^x$$

だから,

$$n!a_n = 1$$

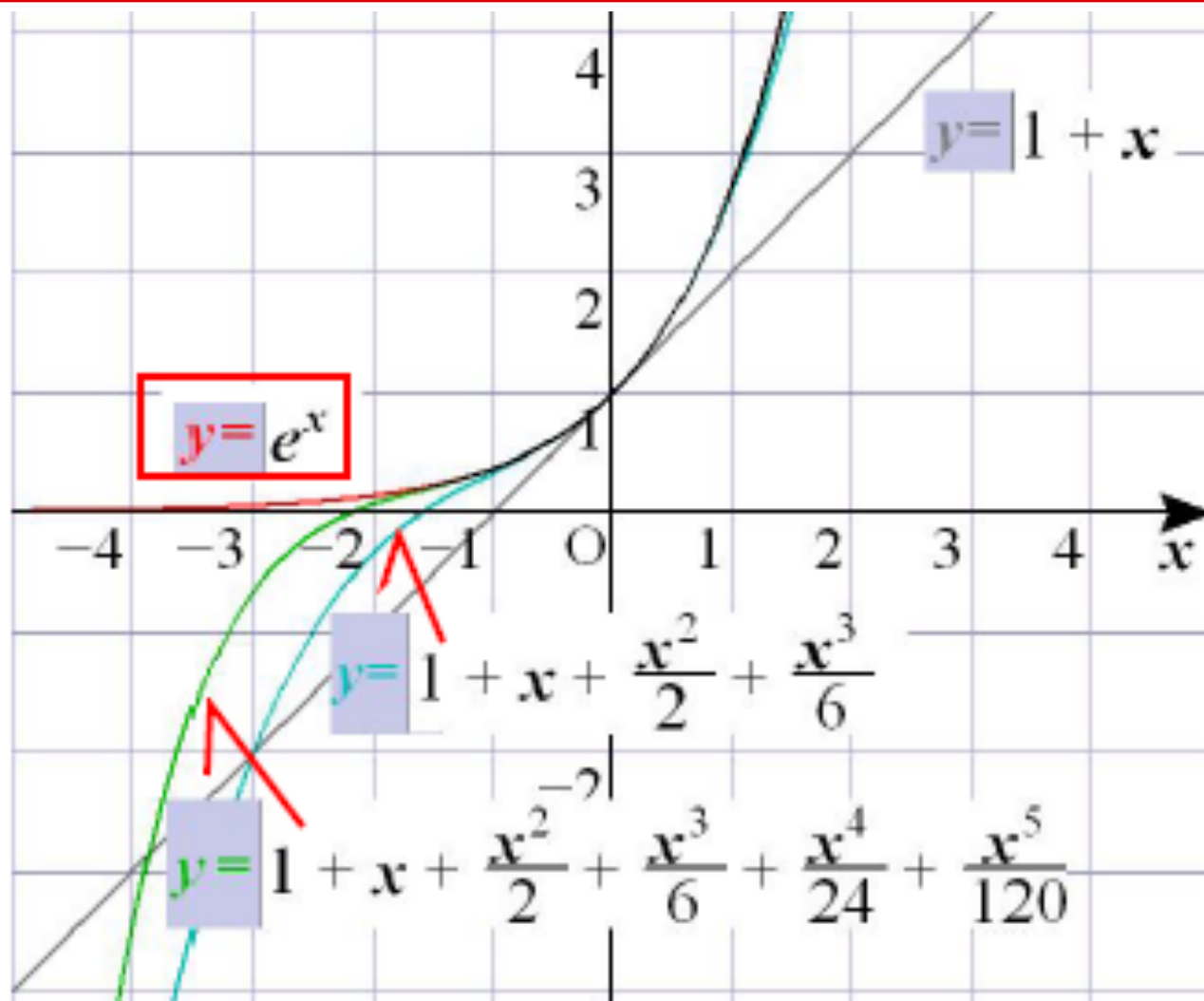
$$a_n = \frac{1}{n!}$$

...

したがって, e^x は,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

冪級数の収束は、実数全域！



sin cos の冪級数展開

cos x の冪級数展開

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

sin x の冪級数展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

x=0 を代入

$$\cos x = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n + \dots \quad \dots (C)$$

$$\sin x = s_0 + s_1x + s_2x^2 + s_3x^3 + \dots + s_nx^n + \dots \quad \dots (S)$$

であるとするとき、

$$\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$$

だから、

$$c_0 = 1, s_0 = 0$$

両辺を微分して, $x=0$ を代入

両辺を微分すると,

$$-\sin x = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots$$

$$\cos x = s_1 + 2s_2x + 3s_3x^2 + \dots + ns_nx^{n-1} + \dots$$

だから,

$$c_1 = 0, s_1 = 1$$

さらに微分して, $x=0$ を代入

$$-\cos x = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x$$

$$+ \dots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \dots$$

$$-\sin x = 2s_2 + 3 \cdot s_3x$$

$$+ \dots + n(n-1)s_n x^{n-2} + \dots$$

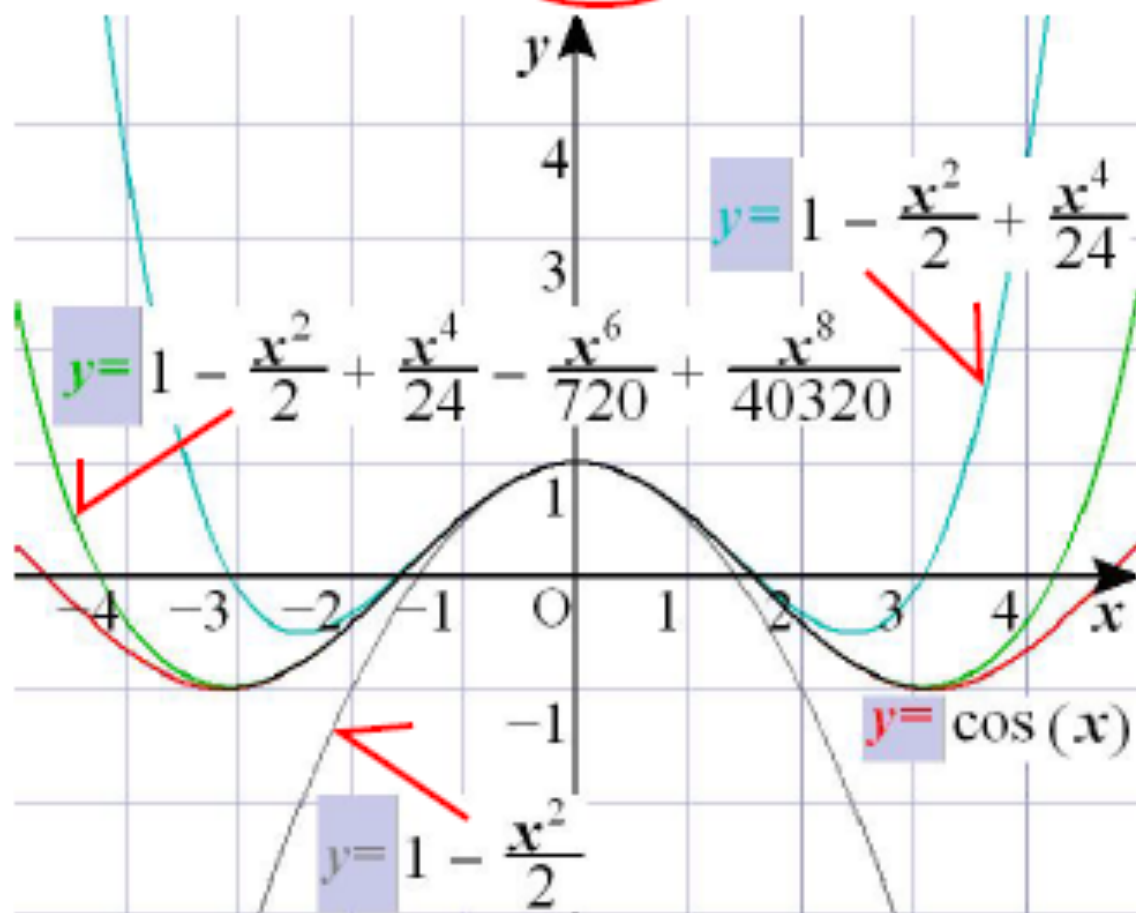
だから,

$$2c_2 = -1, 2s_2 = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}, s_2 = 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

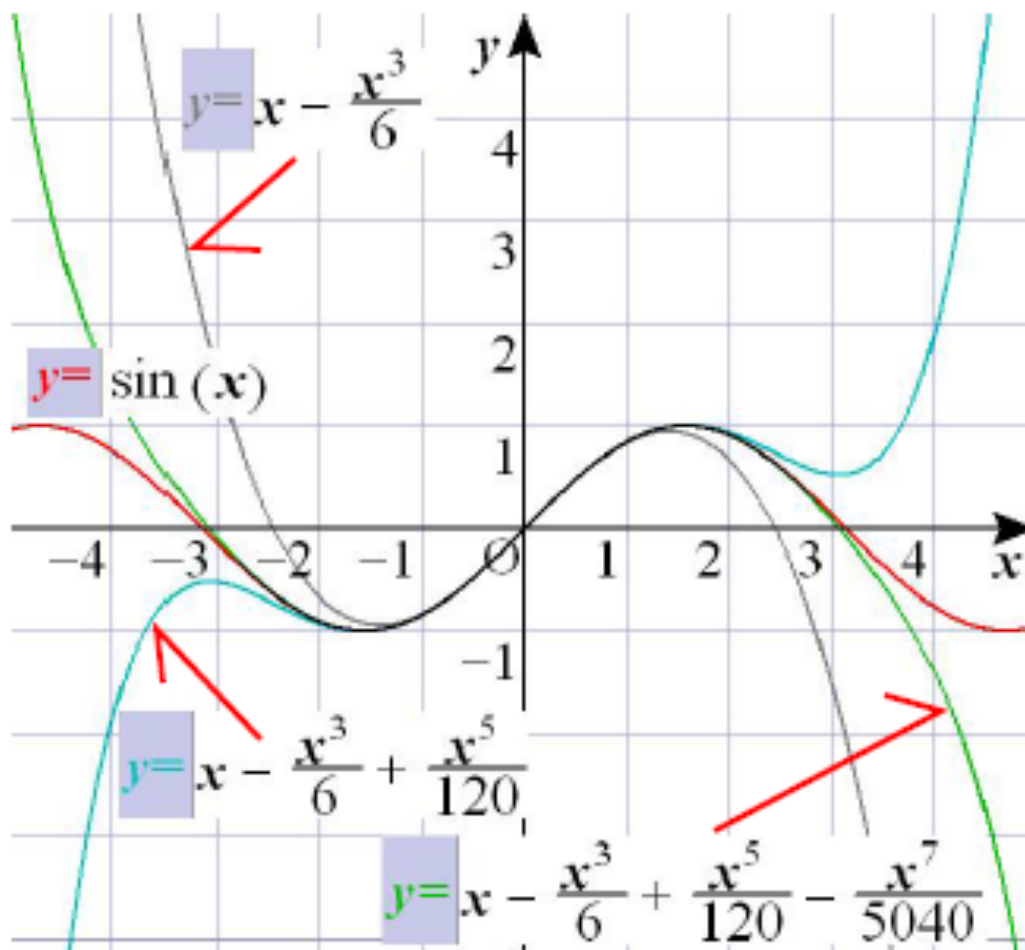
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$



cos x の
冪級数展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$



$\sin x$ の
冪級数展開

虚部だけ

オイラーの公式；

$$e^{xj} = \cos x + j \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{xj} + e^{-xj}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{xj} - e^{-xj}}{2j}$$

オイラーの極形式；

$$z = |z|e^{j \arg z}$$

[オイラーの公式](#)

eの虚数乗(行列乗もいずれ出てくる)

e^x の冪級数展開により,

$$\begin{aligned} e^{xj} &= 1 + xj + \frac{(xj)^2}{2} + \frac{(jx)^3}{3!} + \cdots + \frac{(xj)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + xj - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}j + \cdots + \frac{x^n}{n!}j^n + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots \\ &\quad + j(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots) \end{aligned}$$

$\cos x, \sin x$ の冪級数展開により,

$$e^{xj} = \cos x + j \sin x$$

例3.3.1

(1) $r = |2| = 2, \theta = 0$

だから, $2 = 2e^{0j} //$

(2) $r = |-j| = 1, \theta = \frac{3\pi}{2}$

だから, $-j = e^{\frac{3\pi}{2}j} //$

(3) $r = |1+j| = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$

だから, $1+j = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j} //$

指数法則

指数法則；

$$w^{z_1+z_2} = w^{z_1} \cdot w^{z_2}$$

$$w^{z_1-z_2} = \frac{w^{z_1}}{w^{z_2}}$$

$$w^{z_1 \cdot z_2} = (w^{z_1})^{z_2}$$

$$(w_1 \cdot w_2)^z = w_1^z \cdot w_2^z$$

複素数の
指数でも
成立す
る。

例3.4.1

$$e^{\frac{\pi}{2}j} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j \quad //$$

$$e^{2\pi j} = \cos 2\pi + j \sin 2\pi = 1 \quad //$$

$$e^{1+\frac{\pi}{3}j} = e \cdot e^{\frac{\pi}{3}j}$$

$$= e(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}) = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}e}{2}j \quad //$$

指数関数の周期

e^z の周期 ($2\pi j$) ;

$$e^{z+2\pi j} = e^z$$

指数法則により,

$$e^{z+2\pi j} = e^z \cdot e^{2\pi j}$$

$$= e^z (\cos 2\pi + j \sin 2\pi)$$

$$= e^z \cdot 1 = e^z$$

ド・モアブルの定理

ド・モアブルの定理；

$$(e^{\theta j})^n = e^{n\theta j}$$

1 の n 乗根；

$$z_k = e^{\frac{2\pi}{n} \cdot k j}$$

(n ；正の整数，

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$)

例3.6.1 (1のn乗根)

1 の 5 乗根を,

$$re^{qj}$$

とすると,

$$(re^{qj})^5 = 1$$

により,

$$r^5 \cdot e^{5qj} = e^{2n\pi j}$$

よって,

$$r^5 = 1, e^{5qj} = e^{2n\pi j}$$

$$r = 1, q = \frac{2n\pi}{5}$$

