複素数とその演算

夏期集中パワーアップ講座
北　秀和（大阪工業大学）

§1 [1] 2次方程式の解と複素数

$x^2 - 4x + 7 = 0 \quad \cdots 1)$ の解を求めよ.

平方完成により,

$$\left(x - \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 7 = 0,$$

$$(x-2)^2 = -3.$$

2乗して「−3」

負数の平方根を認め,

$$\sqrt{-n} \quad ; \left(\sqrt{-n}\right)^2 = -n \quad \cdots 2)$$

とすると,

2次方程式の解と複素数

1) の解は次のように求める，

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 7}.$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}j \quad //.$$

負数の平方根の計算

$\sqrt{-3}\sqrt{-5}$　を計算せよ．

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \sqrt{3}j\sqrt{5}j \\
&= \sqrt{3}\sqrt{5}j^2 \\
&= \sqrt{15}\cdot(-1) \\
&= -\sqrt{15} \quad //
\end{aligned}$$

正数の平方根 × j

すなわち，

a を非負の実数のとき，

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}j$$

としてから，計算する．

[2] 複素数の定義･演算

複素数の定義・演

２つあるうちの１つ

(定義 1.1)

j; $j^2 = -1$ を虚数単位という.

(定義 1.2)

z; $z = a + bj$ $(a,\ b$; 実数$)$

を複素数という.

a を z の実部といい, b を z の虚部という.

例　1.2.1

(1)
$$\text{与式} = (2+1)+(3-7)j$$
$$= 3-4j$$

２乗を －１とする

(2)
$$\text{与式} = 4-12j+9j^2$$
$$= -5-12j \quad //$$

分母は有理化する

(3)
$$\text{与式} = \frac{(2-3j)(1-2j)}{(1+2j)(1-2j)}$$
$$= \frac{2-7j+6j^2}{1-4j^2} = -\frac{4}{5}-\frac{7}{5}j \quad //$$

例　1.2.2(1)

(1)

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (x^2 - y^2) + 2xyj \\
&= -1
\end{aligned}
$$

展開して，実部，
虚部を比較

定理 1.1 により，

$$x^2 - y^2 = -1$$

$$2xy = 0$$

これから，

$$x = 0,\ y = \pm 1 \quad //$$

[3] 共役複素数

共役複素数

(定義 1.4)

複素数

$$z_1 = a + bj \quad (a,\ b;\ \text{実数})$$

に対し,

$$z_2 = a - bj$$

を共役複素数といい,

$$z_2 = \overline{z_1}$$

分母の有理化などで利用

共役複素数の性質

(定理 **1.2**)

共役複素数の性質,

四則と共存

(1) z_1; 実数 $\Leftrightarrow$ $z_1 = \overline{z_1}$

(2) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

(3) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

(4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(5) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

例 1.3.2

$$\bar{z} = \frac{1-\sqrt{3}j}{2}$$

であるから，

和は実部の２倍

(1) $z + \bar{z} = \dfrac{1+\sqrt{3}j}{2} + \dfrac{1-\sqrt{3}j}{2}$

$= 1 \quad //$

(2) $z \cdot \bar{z} = \dfrac{1+\sqrt{3}j}{2} \cdot \dfrac{1-\sqrt{3}j}{2}$

$= \dfrac{1-3j^2}{4}$

積は絶対値 の2乗

$= 1 \quad //$

例 1.3.3 等式の証明

(1) $\alpha = x_1 + jy_1, \quad \beta = x_2 + jy_2$

とする．

自分で，おく．

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \overline{(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2)} \\
&= \overline{(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)} \\
&= (x_1 + x_2) - j(y_1 + y_2) \\
\text{右辺} &= \overline{x_1 + jy_1} + \overline{x_2 + jy_2} \\
&= (x_1 - jy_1) + (x_2 - jy_2) \\
&= (x_1 + x_2) - j(y_1 + y_2)
\end{aligned}
$$

よって，左辺 = 右辺． //

最後は，左辺=右辺