§1 定係数1階線形微分方程式

(1) 関数のベキ級数展開

> 扱いやすい関数 $f(t)$：ベキ級数展開可能
>
> $$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$
>
> $$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{（収束は } t \text{ の適当な区間）}$$

例3
$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)}{2^n n!}t^n + \cdots$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)}{2^n n!}t^n$$
（$|t| < 1$ で収束）

開平方： （平方完成にも利用）

$$
\begin{array}{l|l}
 & 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} \\
\hline
1 & \sqrt{1+t} \\
1 & 1 \\
\hline
2 + \frac{t}{2} & t \\
\frac{t}{2} & t + \frac{t^2}{4} \\
\hline
2 + t - \frac{t^2}{8} & -\frac{t^2}{4} \\
-\frac{t^2}{8} & -\frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{8} + \frac{t^4}{64} \\
\hline
2 + t - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{16} & \frac{t^3}{8} - \frac{t^4}{64} \\
\cdots & \cdots
\end{array}
$$

(3) 同次方程式のベキ級数による解

> 同次方程式：$x'(t) = ax(t)$
>
> 解：$x(t)$
>
> $$= x_0\left(1 + at + \frac{1}{2}(at)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(at)^n + \cdots\right)$$
>
> $$= x_0 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(at)^n \quad \text{（実数全体で収束）}$$

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

とすると，

$$x'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}t^n + \cdots$$
$$ax(t) = aa_0 + aa_1 t + aa_2 t^2 + aa_3 t^3 + \cdots + aa_n t^n + \cdots$$

$x'(t) = ax(t)$ として，係数比較により，

$$a_1 = aa_0$$
$$a_2 = \frac{1}{2}aa_1 = \frac{1}{2}a^2 a_0$$
$$a_3 = \frac{1}{3}aa_2 = \frac{1}{3!}a^3 a_0$$
$$\cdots$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}aa_n = \frac{1}{(n+1)!}a^{n+1}a_0$$

よって，

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$
$$= a_0 + aa_0 t + \frac{1}{2}a^2 a_0 t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}a^n a_0 t^n + \cdots$$
$$= a_0\left[1 + at + \frac{1}{2}(at)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(at)^n + \cdots\right]$$
$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(at)^n \quad \text{（実数全体で収束）}$$

$x_0 = a_0$ により，

$$x(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(at)^n \quad \text{（実数全体で収束）}$$

§2　定係数２階線形微分方程式

(4)　オイラーの公式

> オイラーの公式
>
> $e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt)$
>
> $e^{-ikt} = \cos(kt) - i\sin(kt)$
>
> $\cos(kt) = \frac{1}{2}(e^{ikt} + e^{-ikt})$
>
> $\quad = 1 - \frac{1}{2}(kt)^2 + \frac{1}{24}(kt)^4 + \cdots$
>
> $\sin(kt) = \frac{1}{i2}(e^{ikt} - e^{-ikt})$
>
> $\quad = (kt) - \frac{1}{6}(kt)^3 + \frac{1}{120}(kt)^5 + \cdots$

(3) の後半によるが，詳しくは以下のとおり．

微分方程式 $x'' = -x$ をべき級数で解く．

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + \ldots$$

とすると，

$$x' = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + 6a_6 t^5 + 7a_7 t^6 + \ldots$$

$$x'' = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + 30a_6 t^4 + 42a_7 t^5 + 56a_8 t^6 + \ldots$$

$x'' = -x$ だから，

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0 = -\frac{1}{2!}a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}a_1 = -\frac{1}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{24}a_0 = \frac{1}{4!}a_0$$

$$a_5 = -\frac{1}{20}a_3 = \frac{1}{120}a_1 = \frac{1}{5!}a_1$$

$$a_6 = -\frac{1}{30}a_4 = -\frac{1}{720}a_0 = -\frac{1}{6!}a_0$$

$$a_7 = -\frac{1}{42}a_5 = -\frac{1}{5040}a_1 = -\frac{1}{7!}a_1$$

よって，

$$x(t) = a_0 + a_1 t - \frac{1}{2!}a_0 t^2 - \frac{1}{3!}a_1 t^3 + \frac{1}{4!}a_0 t^4 + \frac{1}{5!}a_1 t^5 - \frac{1}{6!}a_0 t^6 - \frac{1}{7!}a_1 t^7 + \ldots$$

ここで，$-1 = i^2$に注意すると，

$$x = a_0 + a_1 t + \frac{1}{2!}a_0 i^2 t^2 + \frac{1}{3!}a_1 i^2 t^3 + \frac{1}{4!}a_0 i^4 t^4 + \frac{1}{5!}a_1 i^4 t^5 + \frac{1}{6!}a_0 i^6 t^6 + \frac{1}{7!}a_1 i^6 t^7 + \ldots$$

さらに，$a_0 = 1$，$a1 = i$ とすると，

$$x_+ = 1 + it + \frac{1}{2!}(it)^2 + \frac{1}{3!}(it)^3 + \frac{1}{4!}(it)^4 + \frac{1}{5!}(it)^5 + \frac{1}{6!}(it)^6 + \frac{1}{7!}(it)^7 + \ldots$$
$$= e^{it}$$

ここで，

$$x_+ = (1 + \frac{1}{2!}(it)^2 + \frac{1}{4!}(it)^4 + \frac{1}{6!}(it)^6 + \ldots)$$
$$+ (it + \frac{1}{3!}(it)^3 + \frac{1}{5!}(it)^5 + \frac{1}{7!}(it)^7 + \ldots)$$
$$= (1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \ldots)$$
$$+ i(t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \ldots)$$

これを

$$= C(t) + iS(t)$$

とすると，

$$C(t) = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \ldots$$

$$S(t) = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \ldots$$

となるので，

$$C'(t) = -S(t), S'(t) = C(t)$$

となり，

$$C(0) = 1 = \cos(0),$$
$$C'(0) = -S(0) = 0 = \cos'(0),$$
$$C''(0) = -C(0) = -1 = \cos''(0), \ldots$$
$$S(0) = 0 = \sin(0),$$
$$S'(0) = C(0) = 1 = \sin'(0),$$
$$S''(0) = C'(0) = 0 = \sin''(0), \ldots$$

と，$C(t)$ と $\cos(t)$，$S(t)$ と $\sin(t)$ の，$t = 0$ でのすべての階数の導関数が一致する．

したがって，べき級数が一致し，関数として同一．

よって，

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

初回の授業の「今日の講義のポイント，疑問」の欄に学生が書いたこと．C科(47名)，W科(55名)

●べき級数展開に関して

オイラーの公式を早く習いたいなと思いました。

マクローリン展開などおもしろそうなことをこれから習っていくのが楽しみ。
授業でこういう話もおりまぜてほしいです!!

巾級数，オイラーの公式など。

●平行移動に関して

デカルトの話を聞いて、何百年も前に発見された数式が今でもなお使われていることに驚きました。

平行移動のとき $x \to x+3$ としないといけないことがわかった。

平方移動は平方完成してからしてはいけない！
1次関数でも3次関数でも使うことだから！

平行移動の際，平方完成はしてはいけない

平行移動の問題では平方完成をしてはならない。

平行移動させるのに頂点を出してからするのではない

少し高校とはちがうやり方が多いので しっかり頭に入れておきたい。

●関数値の計算に関して

$2x^2-2x-2$ を $(2x-2)x-2$ とすると計算が楽になった。

2次関数で
x でくくって計算する方法がとてもわかりやすく、使いやすかったです。

●文字変数の平方根に関して

ルートの中のマイナスを i に変えないこと。

【2】 次の関数の逆関数を求めよ。

$y=-x^2\ (x \leqq 0)$

x について解く

$x^2=-y$

$x=\pm\sqrt{-y}$

$x \leqq 0$ より

$x=-\sqrt{-y}$

x と y を入れ替える

$y=-\sqrt{x}$

●関数，逆関数に関して

逆関数の確かめ方がすごいと思った！

確かめ方など、高校とは違ったことを学べたのでよかったです。

"関数"のとらえ方が今後とても大事になってくると知ったこと。
合成関数のやり方。

気付いたこと
確かめる方法を初めて知った。

●ノート，解答の書き方に関して

丁寧に書かないと丸をもらえないので間違いもより少なくなると思いました

後で自分がノートを見直す時にわかりやすい様に要点だけ板書する
日本語をしっかり書く
細かくかくと後々わかりやすいので大事なことだと思った。

●その他

高校の復習がほとんどだったが、高校では教えてもらえなかった解法を教えてもらえてよかった。

高校では聞けなかった解き方のテクニックがきけてよかったです。