

§ 1 一次関数, 二次関数

(1) 関数

$$y = f(x); f: x \rightarrow y$$

実数 x に対して, 1 つの値 y が対応

グラフ

点 $(x, f(x))$

(3) 1 次関数

$$y = a_1x + a_0$$

$$y = 2x + 1$$

数表

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

x の増分 1 に対し, y の増分 2

グラフ

直線 [● y 切片 (0, 1), ●傾き 2]

(4) 2 次関数

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$y = 2x^2 - 4x - 3$$

数表

容易な計算方法: $(2x-4)x-3$ (計算数減, 留保なし)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	27	13	3	-3	-5	-3	3

$x = 1$ に関して対称な x に対し, y は等しい

●平方完成 (積分, 微分方程式でも必要)

$$y = 2(x^2 - 2x) - 3$$

$$= 2(x-1)^2 - 1^2 - 3$$

$$= 2(x-1)^2 - 5$$

$x = 1$ に関して対称な x に対し, y は等しい

グラフ

放物線 [●頂点 (1, -5), ●軸 $x = 1$

, ● y 切片 (0, -3), ●もう 1 点 (-1, 3)]

(5) 無限次関数 (冪級数関数)

$$y = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

x が小さいとき,

しばしば, $y = 1 + x$ (一次関数) で近似

せいぜい, $y = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2$ (二次関数) で近似

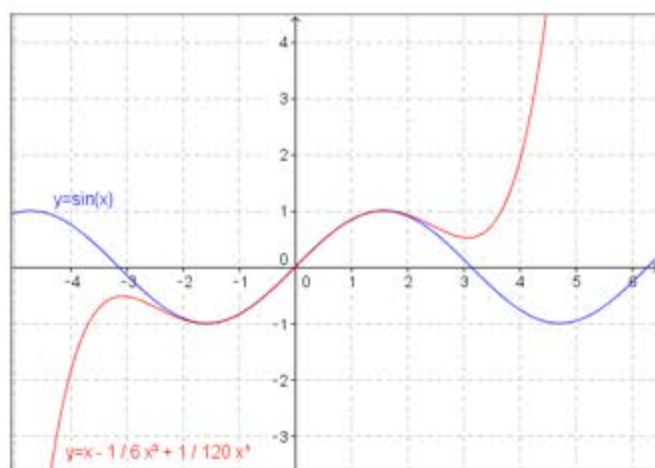
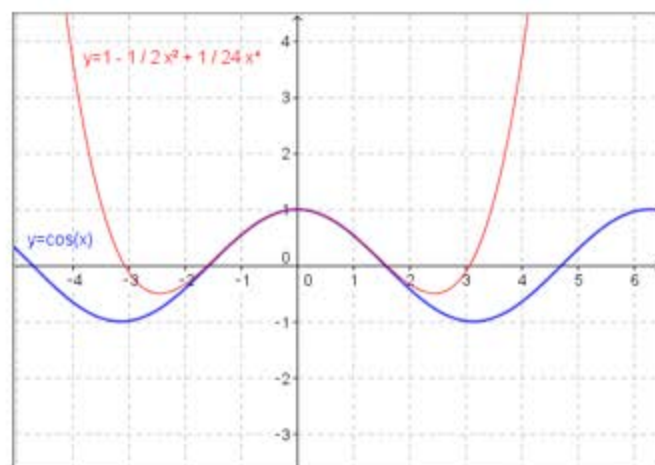
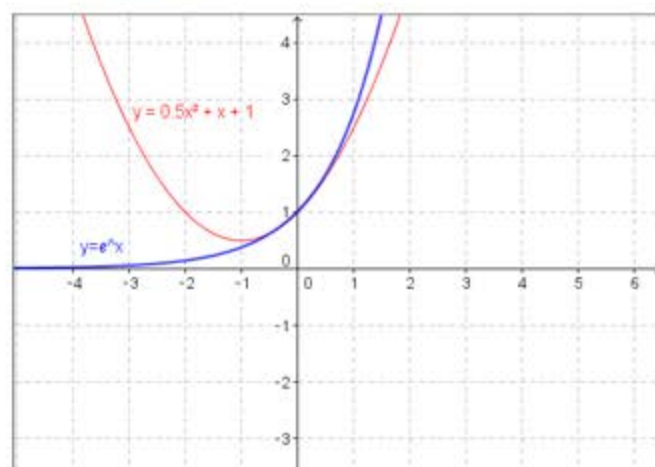
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\text{オイラーの公式})$$

単振動の微分方程式 $y'' + y = 0$ の解法で重要

これを見据えて説明



§ 7 指数関数

(8) ネイピアの数 e と指数関数 $y = e^x$

$$\begin{aligned} \text{ネイピアの数 } e: \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ y = e^x; \text{実数 } x \rightarrow \text{正数 } e^x \\ = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \end{aligned}$$

 $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{e_n}{e_{n-1}} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^n \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \end{aligned}$$

 $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$ となるから,

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} > 1$$

よって, e_n は単調増大.

また, 二項定理から,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3n^3} \\ &\quad + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r!n^r} + \cdots \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^r} + \cdots \\ &= 3 \end{aligned}$$

よって,

 e_n ; 単調増大, 有界 $\rightarrow$ 収束

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$$

さて,

$$f(x) = e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

とすると,

$$f(0) = 1 = a_0$$

$$a_0 = 1$$

$$f(x) = e^x = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$f'(x) = e^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

$$f'(0) = 1 = a_1$$

$$a_1 = 1$$

$$f(x) = e^x = 1 + x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$f''(x) = e^x = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

$$f''(0) = 1 = 2a_2$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$f^{(3)}(x) = e^x = 3 \cdot 2a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \cdots$$

$$f^{(3)}(0) = 1 = 3 \cdot 2a_3$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}$$

 $\cdots$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x = n(n-1)(n-2) \cdots 2a_n + \cdots$$

$$f^{(n)}(0) = 1 = n!a_n$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8}$$

とすると,

$$e \approx 2.71827876984127$$

真の値は,

$$e = 2.718281828459045 \cdots$$

その差は,

$$0.0000030586177750535626 \cdots$$

また,

$$e^{1+x} = e \cdot e^x$$

$$= e \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots\right)$$

$$e^{1.5} \approx e \left(1 + 0.5 + \frac{1}{2}0.5^2 + \frac{1}{3!}0.5^3 + \cdots + \frac{1}{8!}0.5^8\right)$$

とすると,

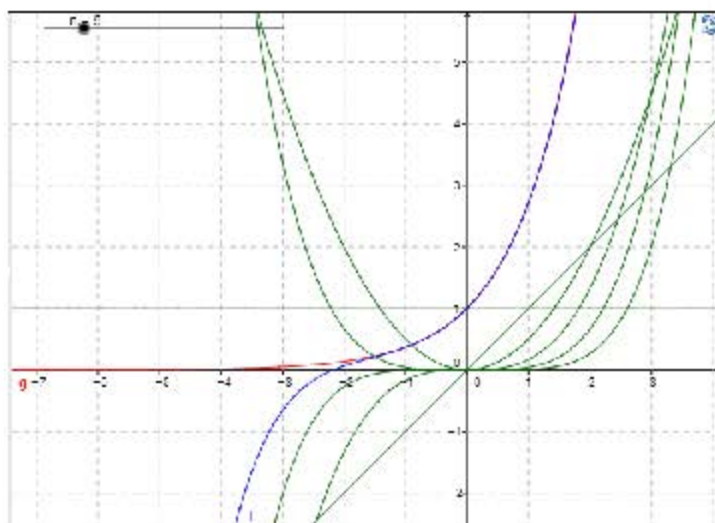
$$e^{1.5} \approx 4.481684012133098$$

真の値は,

$$e = 4.481689070338065 \cdots$$

その差は,

$$0.0000050582049668790319 \cdots$$



$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{5!}x^5$$

とする.

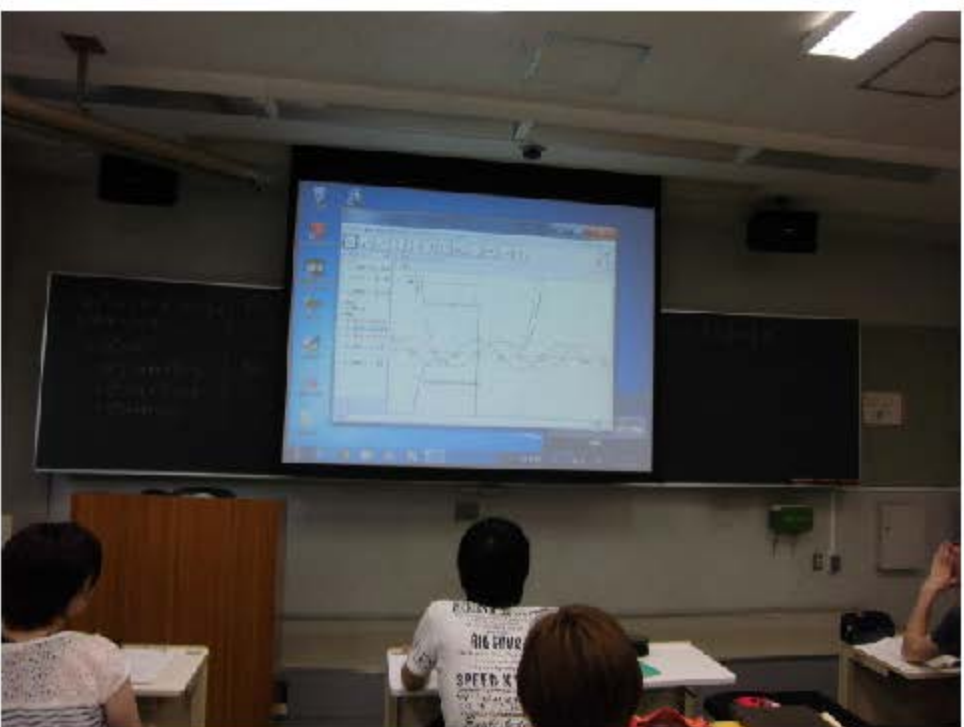
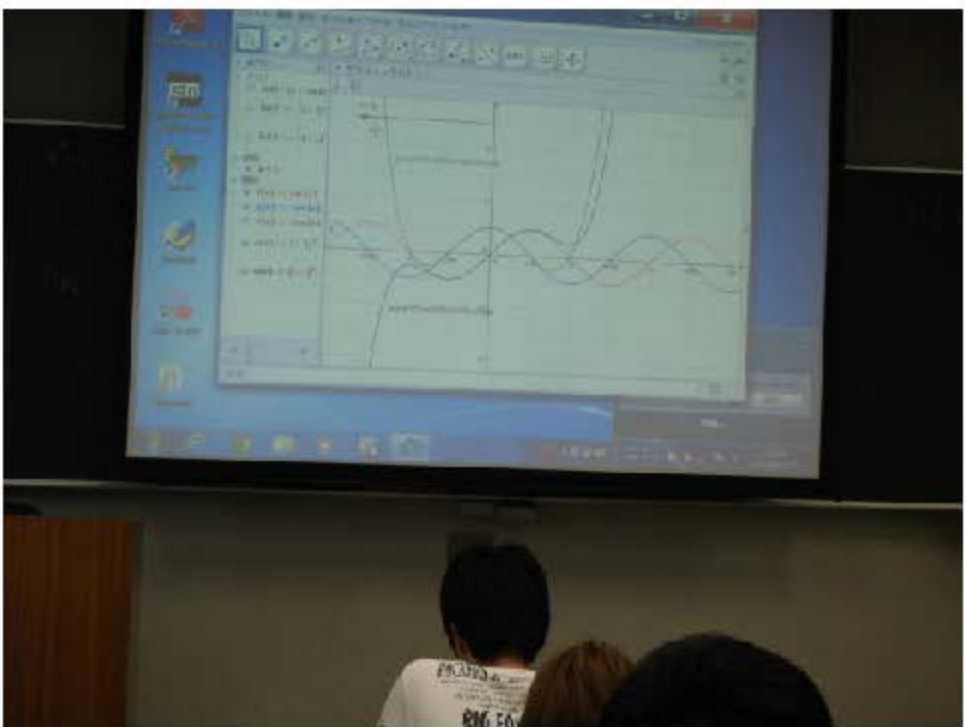
各自の学籍番号の下3桁を pqr とするとき,

$$e^{0.pqr}$$

を上式の式で計算せよ.

下のフォームメールから, 各自の求めた値を,

授業の前日までに提出せよ.



[講義](#)[集中講座](#)[教育センター](#)[数学](#)[数学史](#)[その他](#)

ウェブページの説明

このウェブページは、
大阪工業大学において、
講義・演習(北秀和)を受講する
学生の自宅学習用です。
北 秀和
(大阪工業大学教育センター)

フレームの説明

このフレームは参照表示用です。

07

[講義](#)
[集中講座](#)
[センター](#)
[数学](#)
[数学史](#)
[その他](#)

2014年度前期講義

解析学1

[1章](#), [2章](#), [3章](#), [4章](#), [5章](#), [6章](#),
[7章](#), [8章](#), [9章](#), [10章](#), [11章](#), [12章](#),
[16章](#), [16章-2](#)
[7章](#)

- (1) [自然数乗](#)
- (2) [指数法則](#)
- (3) [整数乗](#)
- (4) [有理数乗](#)
- (5) [無理数乗](#)
- (6) [指数関数 \$y=2^x\$](#)
- (7) [指数関数 \$y=a^x\$](#)
- (8) [ネイピアの数 \$e\$ と指数関数 \$y=e^x\$](#)
- (9) [授業までの課題](#)

[演習問題](#)

真の値は,

$$e = 4.481689070338065 \dots$$

その差は,

$$0.0000050582049668790319 \dots$$

数値

● $n = 5$

リスト



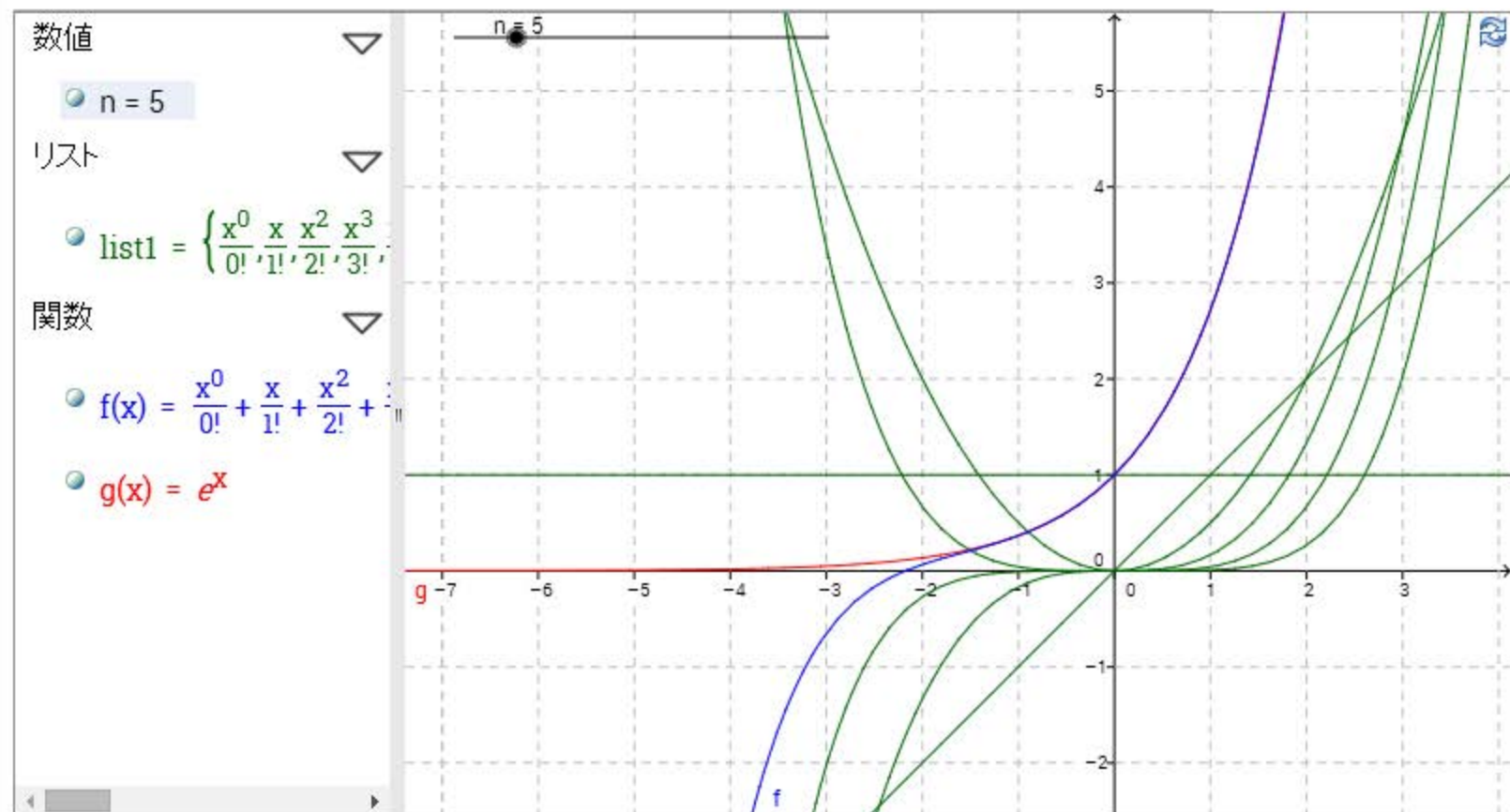
$$\bullet \text{ list1} = \left\{ \frac{x^0}{0!}, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \dots \right\}$$

関数



$$\bullet f(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\bullet g(x) = e^x$$



[講義](#)
[集中講座](#)
[教育センター](#)
[数学](#)
[数学史](#)
[その他](#)

[1]の時間 10分程度 ▼

[2]納得できた
項目番号

[3]納得しにくい
項目番号

[4]の考え

[5]感想質問等

送信する リセット

個人情報の取扱いについて

1. 個人情報は、授業に関することのみに利用します。
2. また、この目的のために提出内容の記録を残します。

[1] 授業前学習に要した時間（単位：分）

[2] 納得できた項目の番号

[3] 納得しにくい項目の番号

[4] 上記 (6) 例 1 や 2 の 5] により，
 $(1+x)^4$ のマクローリン展開を求めよ．

[5] その他，感想，質問

下のフォームメールから，[1][2][3][4][5] について，
授業の前日までに提出せよ．

[フォームメール](#)

[戻進↓](#)

[戻進↓](#)

2014年度前期講義

解析学1

1章, 2章, 3章, 4章, 5章, 6章, 7章, 8章, 9章, 10章, 11章, 12章, 16章, 16

章-2

11章

- (1) 逆関数の微分法
- (2) 対数微分法
- (3) 2変数関数と微分，偏微分
- (4) 陰関数とその導関数
- (5) 高次導関数
- (6) マクローリン展開，テーラー展開