

1. Newton の場合

● 開平方によるべき級数展開

Newton は、開平方によるべき級数展開を取り上げている。以下は、見やすいように今日の日本の記法による。Newton が示しているものとは異なり、また、Newton の例は $\sqrt{a^2+x^2}$ であり、 $\sqrt{1+t}$ と異なるが、本質的には同じである。(Newton(1670-71),p.41.)

$$\begin{array}{r}
 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5t^4}{128} \dots \\
 1 \quad) \quad 1+t \\
 \underline{1} \quad \quad \quad 1 \\
 2 + \frac{t}{2} \quad \quad \quad t \\
 \quad \quad \underline{\frac{t}{2}} \quad \quad \quad t + \frac{t^2}{4} \\
 2 + t - \frac{t^2}{8} \quad \quad \quad -\frac{t^2}{4} \\
 \quad \quad \underline{-\frac{t^2}{8}} \quad \quad \quad -\frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{8} + \frac{t^4}{64} \\
 2 + t - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{16} \quad \quad \quad \frac{t^3}{8} - \frac{t^4}{64} \\
 \quad \quad \underline{\frac{t^3}{16}} \quad \quad \quad \frac{t^3}{8} + \frac{t^4}{16} - \frac{t^5}{64} + \frac{t^6}{256} \\
 2 + t - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{8} - \frac{5t^4}{128} \quad \quad \quad -\frac{5t^4}{64} + \frac{t^5}{64} - \frac{t^6}{256} \\
 \quad \quad \underline{-\frac{5t^4}{128}} \quad \quad \quad -\frac{5t^4}{64} - \frac{5t^5}{128} + \dots \\
 \dots
 \end{array}$$

よって、

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5t^4}{128} + \dots$$

● 円の求積

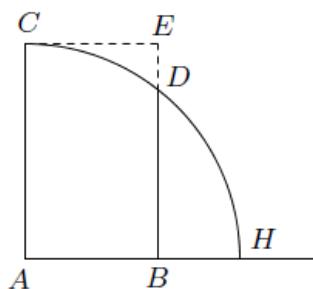


図1 Newton による図を本稿に合わせて修正

Newton は、円の求積として $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ を例として取り上げている。以下は、 $a = 1$ として、見やすいように、Newton のテキストを変えているが、推論の筋道は Newton のものそのままである。(Newton(1670-71),pp.210-214.)

$AC=AH=1$ として、四分の一の単位円 ACH について、一方の半径 AH の中心 A から長さ x のところに立てた垂線 BD と他方の半径 AC との間の面積を z とすると、長方形 ACEB の面積は x となり、2つの面積の流率は $\dot{z} = BD$, $\dot{x} = BE = 1$ となる。

よって、流率方程式は、 $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \sqrt{1-x^2}$ となる。

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5t^4}{128} \dots$$

において、 $t = -x^2$ とすると、

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} \dots$$

この流率方程式を解く(項別積分する)と、

$$z = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{5x^9}{1152} \dots$$

となり、四分の一の単位円について、一方の半径の中心から x のところに立てた垂線と他方の半径との間の図形 ABDC の面積が求められる。したがって、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} \dots$$

2. Leibniz の場合

● 円の「算術的求積」と Leibniz の級数

Leibniz は、円の求積を、「算術的求積」として取り上げている。見やすいように、Leibniz のテキストを変えているが、推論の筋道は Leibniz のものそのままである。Leibniz は、円弧の静力学的な軸についての回転のモメントを使って推論している。(Leibniz(1674),pp.134-145.)

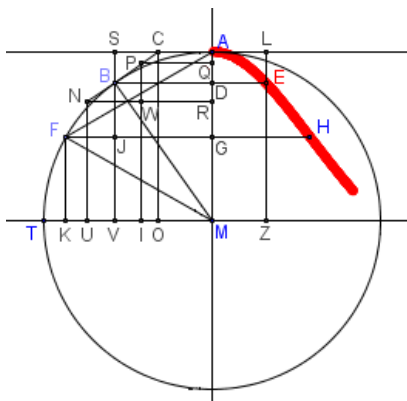


図2 Leibniz による図を本稿に合わせて修正

四分の一の単位円 AFTM があり、弧 AF 上に B がある。B における微小接線 NP を考え、B を中点とする。B,P,N,F から半径 AM に垂線 BD,PQ,NR,FG をとり、また、半径 AM に直交する半径 TM に F,B から垂線 FK,BV をとり、P から NR に下ろした垂線を PW とする。

一方、A における円の接線に B から垂線 BS を取り、接線 BP を延長して、2つの接線の交点を C とすると $BC=AC$ となる。

さらに、円弧 AB の半分の正接 AC に等しい線分 DE を半径 AM に垂直に立てる。B が円周 AFT を動くとき、E の軌跡を無名曲線と呼ぶ。

$\triangle PNW \sim \triangle BCS$ により、

$$PN:PW=BC:BS$$

$$PN \cdot BS = PW \cdot BC$$

モメント_{AC}(AF)で弧 AF の AC についてのモメント

を、面積_{無名線分}(AG)で、線分AG上の無名曲線までの面積AGHAを表すと、

$$\begin{aligned}\text{モメント}_{\text{弧 AC}}(\text{PN}) &= \text{PN} \cdot \text{BS} = \text{PW} \cdot \text{BC} \\ &= \text{PW} \cdot \text{AC} = \text{AC} \cdot \text{QR} = \text{DE} \cdot \text{QR}\end{aligned}$$

と、微小弧PNのモメントと微小区間QR上の微小長方形DE・QRの面積が等しくなり、

$$\begin{aligned}\text{モメント}_{\text{AC}}(\text{弧 AF}) &= \sum \text{モメント}_{\text{AC}}(\text{PN}) \\ &= \sum \text{DE} \cdot \text{QR} \\ &= \text{面積}_{\text{無名線分}}(\text{AG}) \quad \cdots 1]\end{aligned}$$

となる。

$\triangle \text{PNW} \sim \triangle \text{MBV}$ により、

$$\text{PN}:\text{NW}=\text{MB}:\text{BV}$$

$$\text{PN} \cdot \text{BV} = \text{NW} \cdot \text{MB}$$

$$\text{モメント}_{\text{TM}}(\text{PN}) = \text{PN} \cdot \text{BV} = \text{MB} \cdot \text{NW} = \text{AM} \cdot \text{UI}$$

と、微小弧PNのモメントと微小区間UI上の微小長方形AM・UIの面積が等しくなり、

$$\begin{aligned}\text{モメント}_{\text{TM}}(\text{弧 AF}) &= \sum \text{モメント}_{\text{TM}}(\text{PN}) \\ &= \sum \text{AM} \cdot \text{UI} \\ &= \text{AM} \cdot \sum \text{UI} \\ &= \text{AM} \cdot \text{KM} \\ &= 2 \cdot \triangle \text{MAF} \quad \cdots 2]\end{aligned}$$

となる。ところが、

$$\begin{aligned}\text{モメント}_{\text{AC}}(\text{PN}) + \text{モメント}_{\text{TM}}(\text{PN}) & \\ &= \text{PN} \cdot \text{BS} + \text{PN} \cdot \text{BV} \\ &= \text{PN} \cdot \text{SV} \\ &= \text{PN} \cdot \text{AM}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\text{モメント}_{\text{AC}}(\text{弧 AF}) + \text{モメント}_{\text{TM}}(\text{弧 AF}) & \\ &= \sum (\text{モメント}_{\text{AC}}(\text{PN}) + \text{モメント}_{\text{TM}}(\text{PN})) \\ &= \sum \text{PN} \cdot \text{SV} \\ &= \text{AM} \cdot \sum \text{PN} \\ &= \text{AM} \cdot \text{弧 AF} \\ &= 2 \cdot \text{扇形 MAF} \quad \cdots 3]\end{aligned}$$

となる。

2], 3]により、

$$\begin{aligned}\text{モメント}_{\text{AC}}(\text{円弧 AF}) & \\ &= 2 \cdot \text{扇形 MAF} - \text{モメント}_{\text{TM}}(\text{円弧 AF}) \\ &= 2 \cdot \text{扇形 MAF} - 2 \cdot \triangle \text{MAF} \\ &= 2 \cdot \text{扇形 MAF} - \text{長方形 MA} \cdot \text{MK}\end{aligned}$$

となるが、1]により、

$$\text{モメント}_{\text{AC}}(\text{円弧 AF}) = \text{面積}_{\text{無名線分}}(\text{AG}) = \text{AGH}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\text{扇形 MAF} &= \frac{1}{2} (\text{長方形 MA} \cdot \text{MK} + \text{AGH}) \\ \text{したがって、面積}_{\text{無名線分}}(\text{AD}) &= \text{ADE} \text{として、} \\ \text{扇形 MAB} &= \frac{1}{2} (\text{長方形 MA} \cdot \text{MV} + \text{ADE})\end{aligned}$$

となる。一方、

$\triangle \text{BCS} \sim \triangle \text{MBV}$ により

$$\text{BC}:\text{CS}=\text{MB}:\text{BV}$$

$$\text{BC} \cdot \text{BV} = \text{MB} \cdot \text{CS}$$

よって、

$$\text{DE} \cdot \text{DM} = \text{SV} \cdot \text{SC}$$

となり、長方形DE・DMとSV・SCとが等しい。

したがって、面積_{無名線分}(AL)=ALEとして、

$$\begin{aligned}\text{扇形 MAB} &= \frac{1}{2} (\text{長方形 MA} \cdot \text{MV} + \text{ADE}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{長方形 MA} \cdot \text{MO} + \text{長方形 SV} \cdot \text{SC} + \text{ADE}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{長方形 MA} \cdot \text{MO} + \text{長方形 DE} \cdot \text{DM} + \text{ADE}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{長方形 CL} \cdot \text{CO} - \text{ALE}) \quad \cdots 4]\end{aligned}$$

(「一方」以降のこの部分のLeibnizの実際の記述は、上記の相似による幾何学的推論ではなく、半径 a 、 $\text{AD}=x$ と置いて代数的推論による。)

今、 $\text{AD}=x, \text{AC}=y$ とすると、 $\triangle \text{BCS} \sim \triangle \text{MBV}$ により

$$\text{BC}:\text{BS}=\text{MB}:\text{MV}$$

よって、

$$\begin{aligned}y:x &= 1:\sqrt{1-(1-x)^2} \\ x &= y\sqrt{2x-x^2} \\ x &= y^2(2-x) \\ x &= 2y^2/(1+y^2) \\ &= 2y^2(1-y^2+y^4-y^6+\cdots) \\ &= 2(y^2-y^4+y^6-y^8+\cdots)\end{aligned}$$

となり、

$$\text{長方形 CL} \cdot \text{CO} = 2y$$

および、 x のべき級数展開による求積、

$$\begin{aligned}\text{AEL} &= \text{面積}_{\text{無名線分}}(\text{AL}) \\ &= 2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} - \frac{y^9}{9} + \cdots\right)\end{aligned}$$

と4]により、

$$\begin{aligned}\text{扇形 MAB} &= \frac{1}{2} (\text{長方形 CL} \cdot \text{CO} - \text{AEL}) \\ &= \frac{1}{2} (2y - 2(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} - \frac{y^9}{9} + \cdots)) \\ &= y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} - \cdots\end{aligned}$$

扇形が四分の一の単位円なら、 $y=1$ だから、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \quad (\text{Leibniz の級数})$$

3. Euler の場合

●指数量と対数量の級数表示

Eulerは、微分法に入る前に、一般二項展開を軸にして、無限解析の処理により、指数量・対数量のべき級数展開を求めている。幾分見やすいように、Eulerのテキストを変えているが、推論の筋道はEulerのものそのままである。18世紀半ばの無限解析に特徴的な無限大の数・無限小の数の処理も、当然そのままである。(Euler(1748), pp.99-106.)

$a > 1$, w を無限小の数(+0)として、 $a^0 = 1$ により、

$$a^w = 1 + y$$

となつて、 y も無限小の数(+0)となるので、 $k = \frac{y}{w}$ と

みると,

$$a^w = 1 + kw$$

となる.

t にどのような値を代入しても,

$$a^{tw} = (1 + kw)^t$$

これを一般二項展開して,

$$a^{tw} = 1 + \frac{t}{1}kw + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2}(kw)^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(kw)^3 + \dots$$

ここで, $z = tw$ がある有限数となるように $t = \frac{z}{w}$ とし,
 t を無限大の数 ($+\infty$) にすると, $w = \frac{z}{t}$ だから,

$$\begin{aligned} a^z &= (1 + \frac{kz}{t})^t = 1 + \frac{t}{1}\frac{kz}{t} + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2}(\frac{kz}{t})^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(\frac{kz}{t})^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(t-1)}{1 \cdot 2}(kz)^2 + \frac{1(t-1)(t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(kz)^3 + \dots \end{aligned}$$

ここで, t は無限大の数だから, $\frac{t-1}{t} = 1$ となるので,

$$= 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1}{1 \cdot 2}(kz)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(kz)^3 + \dots$$

$z = 1$ とし, $k = 1$ となるときは,

$$a = (1 + \frac{1}{t})^t$$

となり,

$$(1 + \frac{1}{t})^{tz} = 1 + \frac{1}{1}z + \frac{1}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \dots \quad \dots [1]$$

となる.

これが指数量の級数展開である.

さて, $a^w = 1 + kw$ により, a を対数の底にとると,

$$w = \log(1 + kw)$$

$$tw = \log(1 + kw)^t$$

となり, t が大きいほど, $(1 + kw)^t$ はいっそう 1 より大きい数になるので, 正の任意の数 x に対し,

$$(1 + kw)^t = 1 + x$$

とおくと,

$$\log(1 + x) = \log(1 + kw)^t = tw \quad \dots [2]$$

となり, $\log(1 + x)$ が有限数であるから, 無限小の数 w に応じて, tw が有限数となるように t は無限大の数となる.

ここで, $(1 + kw)^t = 1 + x$ を kw について解くと,

$$kw = (1 + x)^{\frac{1}{t}} - 1$$

$$tw = \frac{t}{k}((1 + x)^{\frac{1}{t}} - 1) \quad \dots [3]$$

さらに, 一般二項展開により,

$$\begin{aligned} (1 + x)^{\frac{1}{t}} &= 1 + \frac{1}{t}x + \frac{1(1-t)}{2 \cdot t \cdot t}x^2 + \frac{1(1-t)(1-2t)}{2 \cdot 3 \cdot t \cdot t \cdot t}x^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{t}x - \frac{1(t-1)}{t \cdot 2t}x^2 + \frac{1(t-1)(2t-1)}{t \cdot 2t \cdot 3t}x^3 - \dots \end{aligned}$$

となるから, [2],[3] により,

$$\begin{aligned} \log(1 + x) &= tw = \frac{t}{k}((1 + x)^{\frac{1}{t}} - 1) \\ &= \frac{1}{k}(\frac{t}{t}x - \frac{t(t-1)}{t \cdot 2t}x^2 + \frac{t(t-1)(2t-1)}{t \cdot 2t \cdot 3t}x^3 - \dots) \end{aligned}$$

t を無限大の数とすると,

$$= \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots)$$

となる.

これが対数量の級数展開である.

さらに,

$$\log(1 + x) = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots)$$

$$\log(1 - x) = -\frac{1}{k}(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots)$$

となるので,

$$\begin{aligned} \log(1 + x) - \log(1 - x) &= \log \frac{1+x}{1-x} \\ &= \frac{2}{k}(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots) \end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{1+x}{1-x} = a$$

とすると,

$$x = \frac{a-1}{a+1}$$

となり, $\log a = 1$ により,

$$\begin{aligned} k &= k \log a = k \log \frac{1+x}{1-x} = \\ &= 2(\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}(\frac{a-1}{a+1})^3 + \frac{1}{5}(\frac{a-1}{a+1})^5 + \dots) \end{aligned}$$

となつて, 底 a から対応する k の値を見つけることが可能となる.

$k = 1$ となるように a を決めると, [1] より,

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

となり, これを e を用いて表す. e を底とする対数を自然対数, 双曲線対数という.

自然対数は,

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots)$$

により見出される. 例えば,

$x = \frac{1}{5}$ とすると,

$$\log \frac{6}{4} = \log \frac{3}{2} = \frac{2}{1 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} + \frac{2}{7 \cdot 5^7} + \dots,$$

$x = \frac{1}{7}$ とすると,

$$\log \frac{4}{3} = \frac{2}{1 \cdot 7} + \frac{2}{3 \cdot 7^3} + \frac{2}{5 \cdot 7^5} + \frac{2}{7 \cdot 7^7} + \dots,$$

$x = \frac{1}{9}$ とすると,

$$\log \frac{5}{4} = \frac{2}{1 \cdot 9} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} + \frac{2}{7 \cdot 9^7} + \dots,$$

が, 見出され, これらを適宜組み合わせると,

$\log 2, \log 3, \log 4, \log 5, \log 6, \log 8, \log 9, \log 10$ の値が得られる.

$\log 7$ は, $x = \frac{1}{99}$ とすると, $\log \frac{100}{98} = \log \frac{50}{49}$ が得られ, これを

$$\log 50 = 2 \log 5 + \log 2$$

から引いた値の半分として得られる.

4. 付記

ここには, 比較的簡明で典型的なものを例示した. 各人にはこれ以外にも数多のものが取り扱われていることは言うまでもない.

引用・参考文献

Euler, L. (1748) (高瀬正仁訳 (2001), 『オイラーの無限解析』, 海鳴社).

Leibniz, G.W. (1674) (原亨吉他訳 (1997), 「ホイヘンスへの手紙」, 『ライプニッツ著作集 2』 工作舎).

Newton, I. (1670-71) (edited by D.T. Whiteside (1969), *Methods of series and fluxions, The Mathematical Papers of Issac Newton Vol.3*, Cambridge at the university press).